SEP

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Tec Mante

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE EL MANTE

CURSO PROPEDÉUTICO

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

Nombre del Alumno: ___________________________________

MAYO 2016 **ACADEMIA DE CIENCIAS BÁSICAS**

M.C. EDMUNDO MALDONADO RUELAS

DIRECTOR GENERAL

M. D. CARLOS ARELLANO VÁZQUEZ

SUBDIRECTOR ACADÉMICO

M. D. JESÚS CARLOS FLORES GARCÍA

JEFE DE DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

M.D. LINDA LAMARKA LOPEZ

JEFE DE DESARROLLO ACADÉMICO

COLABORADORES:

ING. ALVARO FERNANDO ALVIZO CRUZ
Q.F.B. JOSE DE JESUS BARRON CASTILLO
M.C. CESAR ALMAZAN COVARRUBIAS
M.D. ERNESTINA HERNANDEZ REYES
ING. ARTURO ALEJANDRO HERNÁNDEZ TORRES
M.D. DANIEL LOPEZ SALAS
ING. FABIOLA REYES PEREZ

CONTENIDO

UNIDAD 1

CONVERSION DE UNIDADES

1.1 CONVERSIÓN DE UNIDADES

La **conversión de unidades** *es la transformación de una cantidad, expresada en una cierta unidad de medida, en otra equivalente, que puede ser del mismo sistema de unidades o no*. Este proceso suele realizarse con el uso de los factores de conversión y las tablas de conversión. Frecuentemente basta multiplicar por una fracción (factor de conversión) y el resultado es otra medida equivalente, en la que han cambiado las unidades. Cuando el cambio de unidades implica la transformación de varias unidades se pueden utilizar varios factores de conversión uno tras otro, de forma que el resultado final será la medida equivalente en las unidades que buscamos, por ejemplo si queremos pasar 8 metros a yardas, lo único que tenemos que hacer es multiplicar 8 x (0.914)=7.312 yardas.

Alguna equivalencia

LONGITUD	**MASA**	**VOLUMEN**
1 km = 1000 m	1 libra = 454 gramos	1 litro(L)= 1000 cm^3
1 Hm = 100 m	1 kg = 2.2 libras	1litro =1000 mL
1 Dm = 10 m	1 Kg = 1000 g	1 galón= 3.785 L
1 m = 100 cm	1 tonelada (ton) = 1000Kg	1 hectolitro (hL)=100L
1 m = 1000 mm	1 onza (oz)= 28.35 g	1 pie^3= 28.3 L
1 cm = 10 mm	1 lb = 16 oz	1 L = 1 dm^3
1 m = 10 Å	1 lb = 454 g	1 cm^3 = 1mL
1 m = 10^6 micras	1 kg = 2 205 lb	1 m^3= 1000 L
1 m = 3.281 pies	1g=1000 miligramos (mg)	| mL = 1 cm^3
1m = 39.37 in	1 utm =9.81 kg	1 barril = 159 L
1 m = 1.094 yardas (yd)	1 utm = 21.62 lb	1 barril = 42 gal
1 yd = 0.914 m	1 slugs = 14.59 kg	**PRESIÓN**
1 yd = 3 pie	1 slugs = 2.1739 lb	1 atm= 760 mm Hg
1 yd = 36 in	**TIEMPO**	1 atm = 101,3x10^3 Pa
1 pie = 30.48 cm	1 hora (h) = 60 minutos	1 atm = 14.7 psi
1 pie = 0.3048 m	1 hora = 3600 s	1 bar = 10^5 Pa
1 pie = 12 pulgadas	1 min = 60 s	1 psi = 1 $\frac{lb_f}{in^2}$
1 pulgada = 2.54 cm	1 día = 24 h	1 bar = 0.987 atm
1 milla = 1.609 km	1 mes = 30 días	**ENERGIA**
1 milla = 1609 m	1 año = 365 días	1 Joule (J) = 10^{7}ergios
1 milla = 5280 pie	1 siglo = 100 años	1 KWH = 3.6 x10^{6}J
AREA	1 década = 10 años	1 cal = 4.186 J
1 pie^2=144 in^2	**FUERZA**	1 kcal = 1000 cal
1m^2=10 000 cm^2	1 N= 10^5 Dinas	1 CV= 736 W
1m^2= 10^6 mm^2	$1kg_f = 9.8\ N$	POTENCIA
1 Ha = 10000 m^2	$1\ Kp = 1kg_f$	1 KW = 1000 w
	$1lb_f = 4.448\ N$	1 Hp = 1.014 CV
		1 Hp = 746 W
		1 CV = 736 W

1.2 FACTOR DE CONVERSIÓN

Un **factor de conversión** *es una operación matemática, para hacer cambios de unidades de la misma magnitud, o para calcular la equivalencia entre los múltiplos y submúltiplos de una determinada unidad de medida.*

Dicho con palabras más sencillas, un factor de conversión es "una cuenta" que permite expresar una medida de diferentes formas. Ejemplos frecuentes de utilización de los factores de conversión son:

- Cambios monetarios: euros, dólares, pesetas, libras, pesos, escudos...
- Medidas de distancias: kilómetros, metros, millas, leguas, yardas...
- Medidas de tiempo: horas, minutos, segundos, siglos, años, días...
- Cambios en velocidades: kilómetro/hora, nudos, años-luz, metros/segundo.

1.2.1 EJEMPLOS DE CONVERSIONES

PARA CONVERTIR DE UNA UNIDAD A OTRA.

- Para convertir una cantidad lo que hacemos es poner la unidad que queremos eliminar en el denominador y la unidad a la que queremos convertir en el numerador, para así poder multiplicar con el numerador y así obtener el valor. Por ejemplo:

  Convertir 2 horas a minutos

  Factor de conversión

  1h = 60 min

  $$2\cancel{h}\left(\frac{60min}{1\cancel{h}}\right)=120\ min$$

  Convertir 5 kg a libras

  Factor de conversión

  1 kg= 2 205 lb

  $$5\,\cancel{kg}\left(\frac{2205\ lb}{1\cancel{kg}}\right)=11025\ lb$$

- A veces es necesario trabajar con cantidades que tienen varias unidades; se realiza el mismo procedimiento algebraico resultan útil para la conversión de unidades múltiples para así poder obtener el nuevo valor. Por ejemplo:

  Convertir 60 $\frac{km}{h}$ a $\frac{m}{s}$

  Factores de conversión

  1 km = 1000 m

  1 h = 3600 s

  $$60\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}}\left(\frac{1000\ m}{1\ \cancel{km}}\right)\left(\frac{1\cancel{h}}{3600\ s}\right)=16.7\frac{m}{s}$$

  Convertir 30 $\frac{mi}{h}$ a $\frac{m}{s}$

  Factores de conversión

  1 mi = 1609 m

  1 h = 3600 s

  $$60\frac{\cancel{mi}}{\cancel{h}}\left(\frac{1609\ m}{1\ \cancel{mi}}\right)\left(\frac{1\cancel{h}}{3600\ s}\right)=28.17\frac{m}{s}$$

1.3 ESTRATEGIA PARA CONVERTIR UNIDADES

1. Escriba la cantidad que desea convertir 2. Defina cada una de las unidades incluidas en la cantidad que va a convertir, en términos de las unidades buscadas.	3. Escribir dos factores de conversión para cada definición, uno de ellos reciproco del otro 4. Multiplique la cantidad que desea convertir por aquellos factores que cancelan todas las unidades, excepto las buscadas

1.4 SISTEMAS DE UNIDADES.

Un sistema de unidades es conjunto de unidades de medida consistente, normalizado y uniforme. En general definen unas pocas unidades de medida a partir de las cuales se derivan el resto. Existen varios sistemas de unidades:

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI) Es el sistema más moderno y más usado en la actualidad. Sus unidades básicas son: el metro, el kilogramo, el segundo, el amperio, el kelvin, la candela y el mol. Las demás unidades son derivadas del sistema internacional.

SISTEMA CEGESINAL DE UNIDADES: Denominado así porque sus unidades básicas son el centímetro, el gramo y el segundo. Fue creado como ampliación del sistema métrico para usos científicos

SISTEMA INGLES DE UNIDADES. Es el conjunto de las unidades no métricas que se utilizan actualmente como medida principal en Estados unidos.

SISTEMA INTERNACIONAL

El sistema internacional de unidades se llama sistema Internacional d' Unités (SI) y, en esencia, el mismo que se conoce como sistema métrico. El comité internacional de pesas y medida ha establecido siete unidades básicas, ha asignado unidades básicas oficiales a cada cantidad. Un resumen de estas cantidades, con unidades básicas y los símbolos para representarla, se presentan en la tabla 2

Cada una de las unidades que parecen en la tabla 2 tiene una definición medible específica, que puede duplicarse en cualquier lugar del mundo. De estas unidades básicas sólo una, el kilogramo, se define en general en términos de una muestra física individual. Esta muestra estándar se guarda en la oficina internacional de pesas y medidas, en Francia. Se han fabricado copias de la muestra original para sus usos en otras naciones. El resto de las unidades se definen en términos de hechos físicos reproducibles y se determinan con precisión en el todo el mundo.

Es posible medir muchas cantidades, tales como volumen, presión, rapidez y fuerza, que son combinaciones de dos o más cantidades fundamentales. Sin embargo, nadie ha encontrado jamás una medida que no pueda expresarse en términos de longitud, masa, tiempo, corriente, temperatura, intensidad luminosa o cantidad de sustancia. Las combinaciones de estas cantidades se denominan unidades derivadas comunes aparecen en la tabla 3.

Las unidades del SI no se han incorporado en forma total en muchas aplicaciones industriales. En estados unidos se está avanzando hacia la adopción de las unidades del SI. No obstante, las conversiones a gran escala son costosas, sobre todo en el caso de muchas aplicaciones mecánicas y térmicas; en vista de esto, la conversión total al sistema internacional tardara todavía algún tiempo. Por ello es necesario que nos familiaricemos con las viejas unidades de ese sistema para le medición de cantidades físicas. Las unidades del sistema usual en estados unidos (SUEU) para diversas cantidades importantes se indican en la tabla 4.

Tabla 2

Unidades básicas del SI para siete cantidades fundamental y dos cantidades complementarias		
Cantidad	Unidad	Símbolo
	Unidades básicas	
Longitud	metro	M
Masa	kilogramo	Kg
Tiempo	segundo	S
Corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	°K
Intensidad Luminosa	candela	Cd
Cantidad de sustancia	mol	Mol
	Unidades complementarias	
Ángulo	Radian	Rad
Ángulo sólido	Estereorradián	Sr

TABLA 3

Unidad derivada para cantidades físicas comunes		
Cantidad	Unidad derivada	Símbolo
Área	Metro cuadrado	m^2
Volumen	Metro cúbico	m^3
Frecuencia	Hertz	Hz
Densidad de masa(densidad)	Kilogramo por metro cubico	Kg/m^3
Rapidez, velocidad	Metro por segundo	m/s
Velocidad angular	Radian por segundo	rad/s
Aceleración	Metro por segundo cuadrado	m/s^2
Aceleración angular	Radian por segundo cuadrado	rad/s^2
Fuerza	Newton	$N = kg \cdot m/s$
Presión (tensión mecánica)	Pascal	$Pa = N/m^2$
Viscosidad cinemática	Metro cuadrado por segundo	m^2/s
Viscosidad dinámica	Newton-segundo por metro cuadrado	$N \cdot s/m^2$
Trabajo, energía, cantidad de calor	Joule	$J = N \cdot m$
Potencia	Watt	$W = J/s$
Cantidad de electricidad	Coulomb	C
Diferencia de potencial, fuerza electromotriz	Volt	$V = J/C$
Intensidad del campo eléctrico	Volt por metro	V/m
Resistencia eléctrica	Ohm	$\Omega = V/A$
Capacitancia	Farad	$F = C/V$
Flujo magnético	Weber	$Wb = V \cdot s$
Inductancia	Henry	

Densidad de flujo magnético	Tesla	$H = {V \cdot s}/{A}$
Intensidad de campo magnético	Ampere por metro	$T = {Wb}/{m^2}$
Fuerza magneto motriz	Ampere	${A}/{m}$
Flujo luminoso	Lumen	A
Luminosidad	Candela por metro cuadrado	$lm = cd \cdot sr$
Iluminación	Lux	${cd}/{m^2}$
Número de onda	1 por metro	$lx = {lm}/{m^2}$
Entropía	Joule por Kelvin	${1}/{m} = m^{-1}$
Calor especifico	Joule por kilogramo kelvin	${J}/{°K}$
		${J}/{Kg \cdot °K}$
Conductividad térmica	Watt por metro kelvin	${W}/{m \cdot °K}$
Intensidad radiante	Watt por estereorradián	${W}/{sr}$
Actividad (de una función radioactiva)	1 por segundo	${1}/{s} = s^{-1}$

Tabla 4

Unidades del sistema usual en Estados Unidos		
Magnitud	Unidades del SI	Unidades del SUEU
Longitud	Metro (m)	Pie (Ft)
Masa	Kilogramo (kg)	Slug (slug)
Tiempo	Segundo (s)	Segundo (s)
Fuerza (peso)	Newton (N)	Libra (lb)
Temperatura	Kelvin (°K)	Grado Rankine (°R)

1.4.1 PROBLEMAS DE CONVERSIÓN DE UNIDADES

RESULEVA LOS SIGUIENTES PROBLEMAS EN LOS CUALES SE CALIFICARÁ PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN.

1. ¿Cuál es la altura en centímetros de una mujer que mide 5 pies y 6 pulgadas? R= 168 cm

2. Una sola loseta de piso mide 8 in de cada lado. Si las losetas se ponen lado a lado, ¿Qué distancia en metros pueden cubrir una fila de 20 losetas?

3. Un campo de futbol soccer mide 100 m de largo y 60 m de ancho ¿Cuáles son la longitud y el ancho del campo en pies? R = 328 ft, 197 ft.

4. El mango de una llave inglesa mide 8 in. ¿Cuál es la longitud de dicho mango en centímetros?

5. Un monitor de computadora de 19 in tiene una sección efectiva de imagen que mide 18 in en diagonal. Exprese esta distancia en metros. R= 0.457 m

6. La longitud de una libreta es de 234.5 mm y su anchura es de 158.4 mm. Exprese el área superficial de la libreta en metros cuadrados

7. Un cubo mide 5 in por lado ¿Cuál es el volumen del cubo en m^3 y ft^3?

8. En una carretera interestatal se ha impuesto un límite de rapidez de 75 mi/hr
    a. ¿A cuánto equivale esta rapidez en kilómetros por hora?
    b. ¿A cuánto equivale esta rapidez en pies por segundo?

9. Un motor Nissan tiene 1600 cm^3 de cilindrada (volumen) y un diámetro interior de 84 mm. Exprese estas medidas en pulgadas cúbicas y en pulgadas.

10. Un galón estadounidense tiene un volumen equivalente a 231 in^3 ¿Cuántos galones se necesitan para rellenar un depósito que mide 18 in de largo, 16 in de ancho y 12 in de alto?

11. Un electricista va a instalar un cable subterráneo desde la carretera hasta una vivienda que se localiza a una distancia de 1.20 mi en el bosque. ¿Cuántos pies de cable van a necesitar?

1.5 EJERCICIOS UNIDAD 1

RESUELVA LAS SIGUIENTES CONVERSIONES

1. La distancia entre dos ciudades es de 100 mi ¿Cuál es el número de kilómetros entre las dos ciudades?
   a) menor que 100, b) mayor que 100 c) igual a 100.

2. En una autopista interestatal en una región rural de Wyoming, un automóvil viaja con una rapidez de 38 m/s ¿El conductor rebasó el límite de velocidad de 75 mi/h?

3. Un lote rectangular mide 100 ft por 150 ft. Determine el área de este lote en metros cuadrados.

4. Un auditorio mide 40 m x 20m x12m. La densidad del aire es de 1.20 kg/m^3 ¿Cuál son a) el volumen de la habitación en pies cúbicos y b) el peso en libras del aire en la habitación?

5. Una pieza solida de plomo tiene una masa de 23.94 g y un volumen de 2.10 cm^3. A partir de estos datos, calcule la densidad del plomo en unidades del SI en ${kg}/{m^3}$.

6. Un cargador de mineral mueve 1 200 ton/h de una mina a la superficie. Convierta esta relación a libras por segundo. (1 ton=2000 lb).

UNIDAD 2

TRIGONOMETRIA Y GEOMETRIA

2.1 DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

ANGULO. Es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen llamado "vértice". Las semirrectas se llaman "lados".

El ángulo se designa por una letra mayúscula situada en el vértice. A veces se usa una letra griega dentro del vértice. También podemos usar tres letras mayúsculas de manera que quede en el medio la letra que está situada en el vértice del ángulo.

En la figura 1 se representan los ángulos A, α y MNP, o PNM.

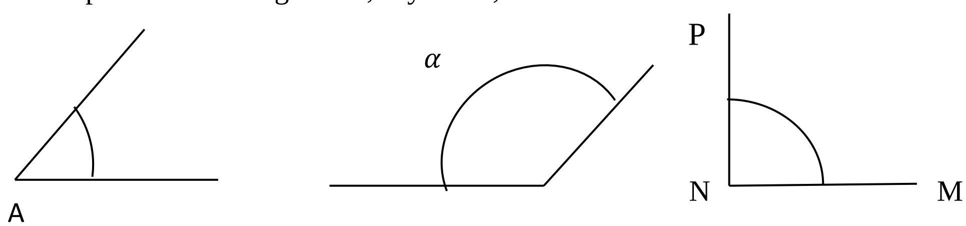
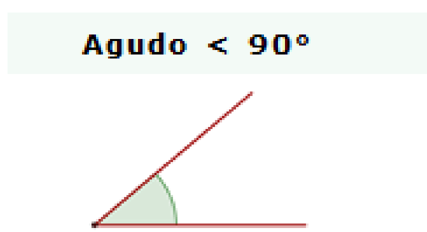
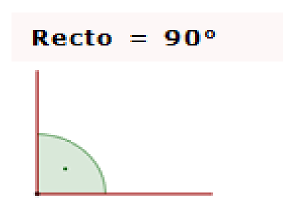
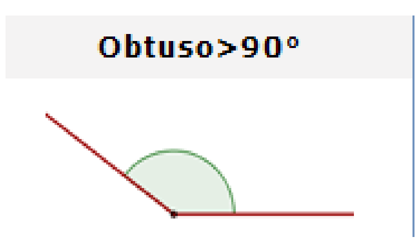
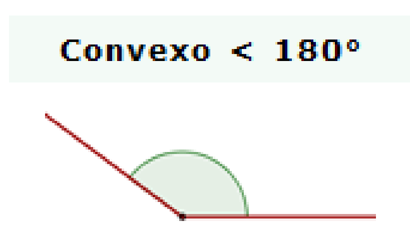
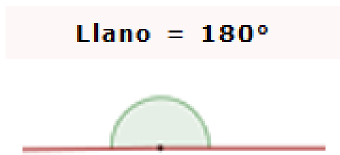
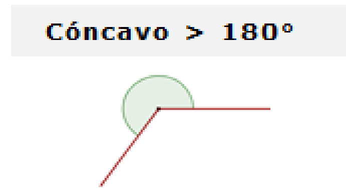
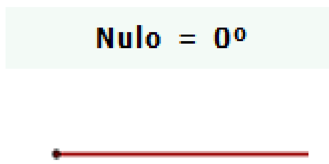
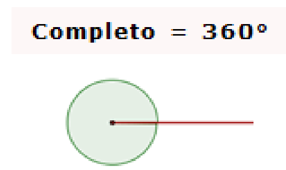


FIGURA 1. SE REPRESENTAN LOS ANGULOS A, α y MNP, o PNM.

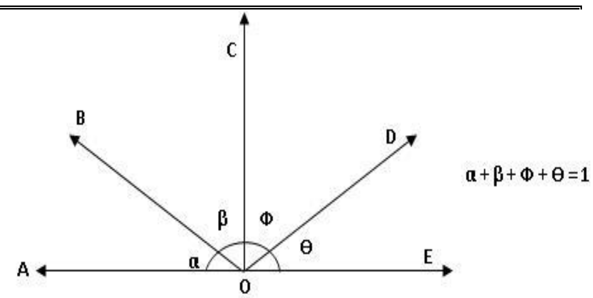
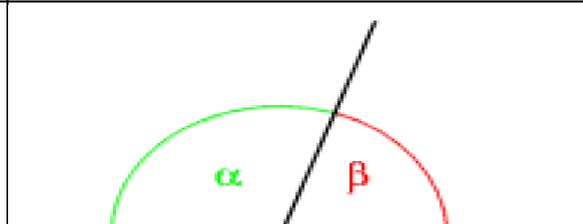
2.1.1 CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

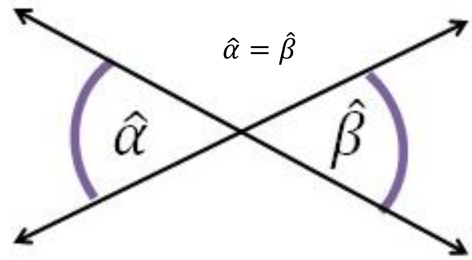
Clasificación de ángulos según su magnitud

ANGULO AGUDO Es el ángulo que mide menos de 90°. 	ANGULO RECTO. Es el ángulo que mide 90°. También llamado un cuarto de vuelta es un giro de 90. 
ANGULO OBTUSO Es el ángulo que mide más de 90°, pero menos de 180. 	ANGULO CONVEXO Es el ángulo que mide menos de 180° 
ANGULO LLANO. Es el ángulo que mide 180° es	ANGULO CÓNCAVO. Es el ángulo que mide más

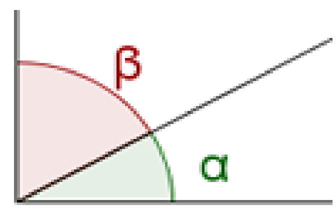
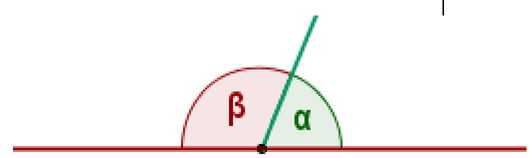
decir el que mide media vuelta. 	de 180° 
ANGULO NULO. Es el ángulo que mide 0°. 	ANGULO COMPLETO. Es el ángulo que vale 360°, también llamado de un giro. 

2.1.2 CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS SEGÚN SU POSICIÓN.

ANGULOS CONSECUTIVOS. Son aquellos que tienen el vértice y un lado común. TEOREMA: “Los ángulos consecutivos formados a un lado de una recta, suma 180°”. TEOREMA: “La suma de los ángulos consecutivos alrededor de un punto, vale cuatro ángulos rectos”.	
ANGULO ADYACENTES. Son aquellos que tienen vértice y un lado común, y los otros lados situados uno en prolongación del otro; forman un ángulo llano. TEOREMA: “Dos ángulos adyacentes son suplementarios”	

ANGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE. Son los que, teniendo el vértice común, los lados de uno son prolongación de los lados del otro. Teorema: “Los ángulos opuestos por el vértice son iguales”	

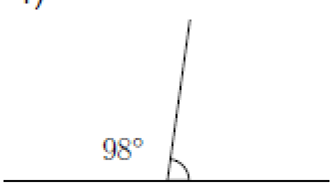
2.1.3 CLASIFICACION DE ÁNGULOS SEGÚN SUS SUMAS.

ANGULOS COMPLEMENTARIOS. Son dos ángulos que sumados valen un ángulo recto, es decir, 90°. $\alpha + \beta = 90°$		
ANGULOS SUPLEMENTARIOS. Son dos ángulos que sumados valen dos ángulos rectos, es decir 180°. $\alpha + \beta = 180°$		

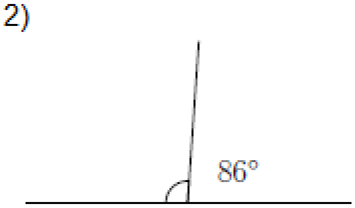
EJEMPLO:

Complete los ángulos que faltan.

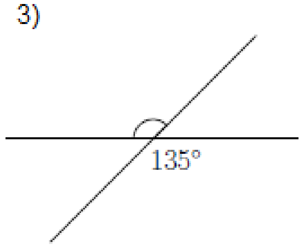
1)



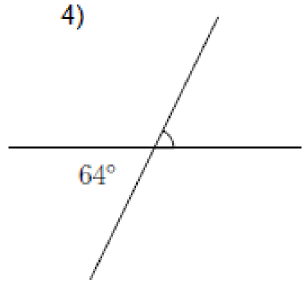
2)



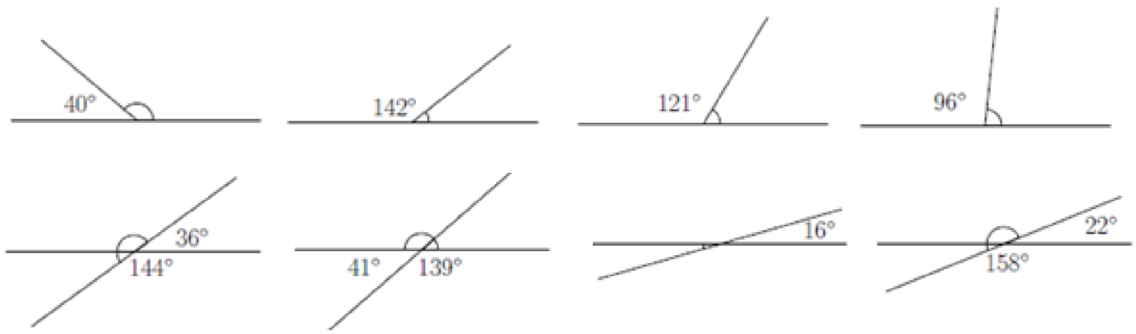
3)



4)

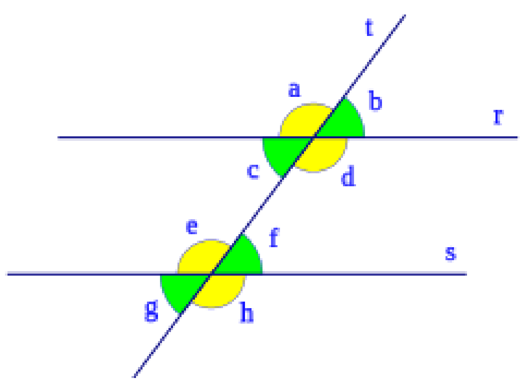


EJERCICIOS: Complete los ángulos que faltan



La relación entre dos **rectas paralelas cortadas por una secante** es un análisis clásico de la geometría euclidiana, que permite analizar una infinidad de problemas prácticos, así como definir algunos conceptos de interés en cuanto a congruencia y suplementaridad de ángulos.

Partiendo de dos rectas paralelas **r** y **s**, y una transversal **t** que corta a ambas, da lugar a ocho ángulos, cuya posición relativa da lugar a su definición.



2.1.4 DENOMINACIÓN DE LOS ÁNGULOS

- **Ángulos adyacentes**: Son los ángulos que tienen un lado en común y sus otros dos lados son semirrectas opuestas.

Son ángulos adyacentes los siguientes pares de ángulos: a,b; c,d; a,c; b,d; e,f; g,h; e,g; f,h.

Los ángulos adyacentes son suplementarios.(suman 180°)

- **Ángulos opuestos por el vértice**: Si los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro.

Son ángulos opuestos por el vértice los siguientes pares de ángulos: a,d; b,c; e,h; f,g.

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes, es decir tienen la misma medida a cada lado del vértice.

- **Ángulos alternos internos:** Son los que se encuentran a distinto lado de la secante y en la zona interior de las rectas paralelas.

Son ángulos alternos internos los siguientes pares de ángulos: c,f; d,e.

Los ángulos alternos internos son congruentes.

- **Ángulos alternos externos**: Son los que se encuentran a distinto lado de la secante y en la zona externa de las rectas paralelas.

Son ángulos alternos externos los siguientes pares de ángulos: a,h; b,g.

Los ángulos alternos externos son congruentes.

- **Ángulos colaterales internos:** Son los que se encuentran del mismo lado de la secante y entre de las rectas.

Son ángulos colaterales internos los siguientes pares de ángulos: c,e; d,f.

Los ángulos colaterales internos son suplementarios.(suman 180°)

- **Ángulos colaterales externos:** Son los que se encuentran en uno y otro lado de la secante.

Son ángulos colaterales externos los siguientes pares de ángulos: a,g; b,h.

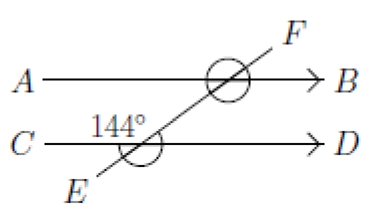
Los ángulos colaterales externos son suplementarios.(suman 180°)

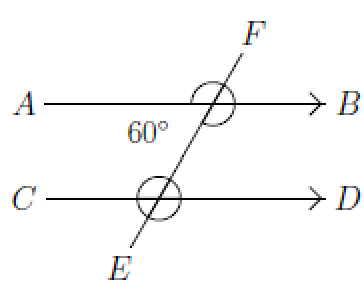
- **Ángulos correspondientes u homólogos:** Son los que se encuentran en el mismo lado de la secante, un ángulo en la parte interior y otro en el exterior de las paralelas.

Son ángulos correspondientes los siguientes pares de ángulos: a,e; b,f; c,g; d,h.

Los ángulos correspondientes son congruentes.

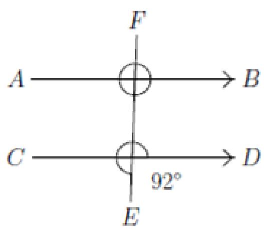
EJEMPLO: Complete los ángulos que faltan.

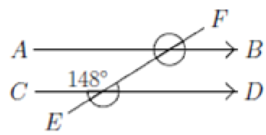


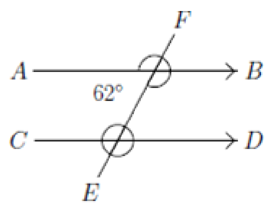


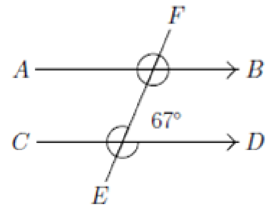
Ejercicios:

a) b) c) d)









1.-

En la figura $L_1 \parallel L_2, \alpha + \beta = ?$

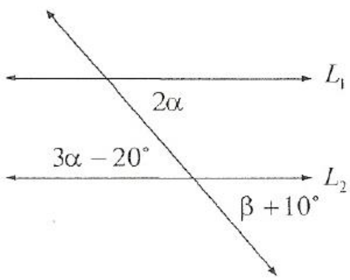
A. 50°

B. 60°

C. 70°

D. 80°

E. 90°



2.-

En la figura $L_1 \parallel L_2, x = ?$

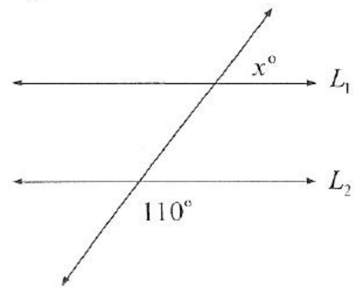
A. 70°

B. 60°

C. 45°

D. 40°

E. 30°



3.-

En la figura $L_1 \parallel L_2$, y $M_1 \parallel M_2$.
¿Cuánto mide c?

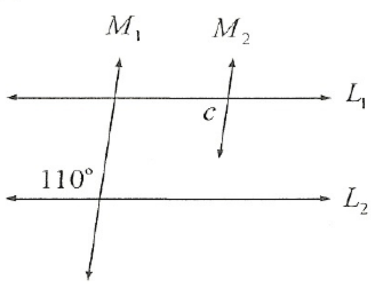
A. 55°

B. 70°

C. 80°

D. 90°

E. 110°



4.-

$P \parallel Q; x = ?$

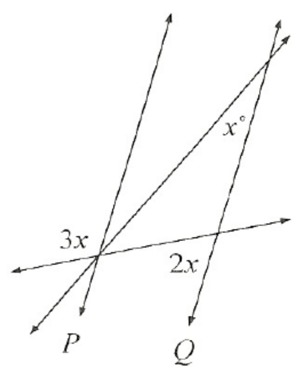
A. 72°

B. 36°

C. 18°

D. 60°

E. NA



5.-

$P \parallel Q; \overleftrightarrow{EF}$ bisectriz $\angle QER; x = ?$

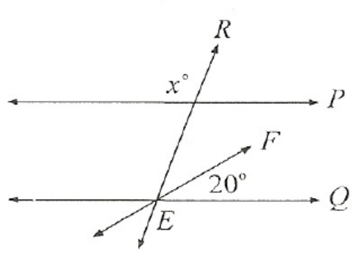
A. 130°

B. 120°

C. 140°

D. 150°

E. NA



6.-

$F \parallel G$; G perpendicular con $M : x = ?$

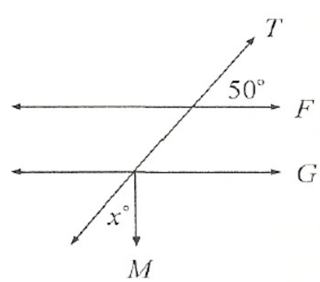
A. 50°

B. 60°

C. 40°

D. 70°

E. NA



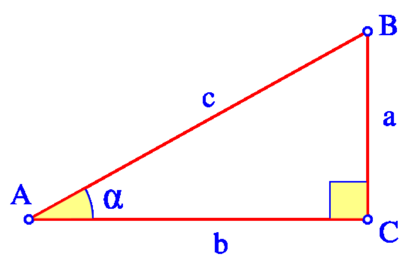
2.2 RAZONES TRIGONOMETRÍA DE ÁNGULOS AGUDOS.

Lastrigonométricas son razones trigonométricas, es decir la división entre dos lados de un triángulo rectángulo respecto a sus ángulos, estas funciones surgieron al estudiar el triángulo rectángulo y observar que los cocientes entre las longitudes de dos de sus lados sólo dependen del valor de los ángulos del triángulo.

A partir de cualquier ángulo agudo α (menor de 90º) es posible construir un triángulo rectángulo ABC como el que puedes apreciar en la siguiente figura.

Triángulo Rectángulo: triángulo que tiene dos ángulos agudos y uno recto

Dado un triángulo rectángulo ABC, se definen las **razones trigonométricas** del ángulo agudo, de la siguiente manera:



- El **seno** es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa:
- El **coseno** es la razón entre el cateto adyacente (o contiguo) y la hipotenusa:
- La **tangente** es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$sen\,\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

2.3 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECIPROCAS

Las **razones trigonométricas Recíprocas** se definen de la siguiente manera:

- La **cosecante** (abreviado como *csc* o *cosec*), razón recíproca del seno:

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{c}{a}$$

- La **secante** (abreviado como *sec*), razón recíproca del coseno:

$$sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha} = \frac{c}{b}$$

- La **cotangente** (abreviado como *cot*), razón recíproca de la tangente:

$$cot\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{b}{a}$$

Son razones trigonométricas recíprocas y el producto de ellas es igual a la unidad, si y sólo si están aplicadas al mismo ángulo.

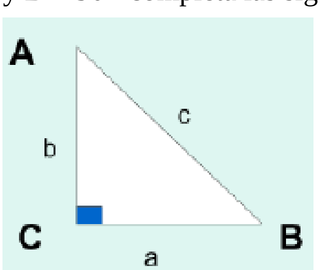
CONCLUSION:

SEN A x COSEC A = 1

COS A x SEC A =1

TAN A x CTG A =1

EJEMPLOS:
1). Tenemos el triángulo rectángulo ABC , recto en C , cuyos ángulos agudos son A y B , siendo A y B = 90º completa las siguientes igualdades:



Sen A=	Cos B =
tan A=	Ctg B=
Sec A=	Cosec B=

A que conclusión llegas:

Por Ejemplo:

Sen 25º =cos 65º ………. 25º + 65º = 90º
Tan 43º =cot 47º ……….. 43º + 47º = 90º
Sec 60º =csc 30º ……….. 60º +30º = 90º

2). Calcula α si Sen α = cos 20º

3) Calcula α si Tan 5α = cot α

4) sen $\frac{\pi}{5} = \cos\alpha$ 90º =$\frac{\pi}{2}$

Ejemplo:

Aplicando las propiedades de las funciones reciprocas resuelve:

1. si sen (2x + 12) . cosec 52º = 1 calcula el valor de x

   2x + 12º =52º
   2x = 40º
   X= 20

Ejercicios:

1.Si Cos $(7X^2 + 3)^o$. sec $(25X – 9)^o$ – 1 =0

2.Si Sen (3X + 10º) = Cos (2X + 35º) Hallar el valor de X

3.Si Tan $(X^2 + 5X-1)^o$ = Ctg $(6X + 11)^o$ Hallar el valor de X

2.4. RAZONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS NOTABLES

2.4.1 Razones trigonométricas de 30º y 60º

La altura divide al triángulo equilátero en dos triángulos rectángulos iguales cuyos ángulos miden 90º, 60º y 30º.

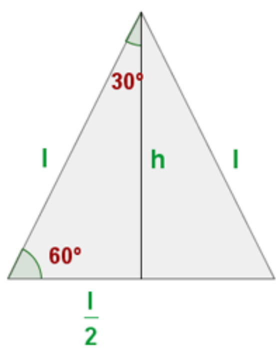
Si aplicamos el teorema de Pitágoras obtenemos la altura en función del lado:

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l$$

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen} 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\, l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\, l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

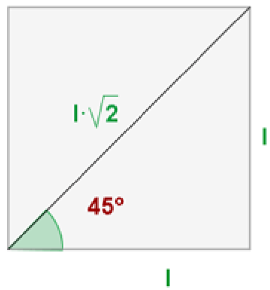
$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{tg} 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$



2.4.2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 45º

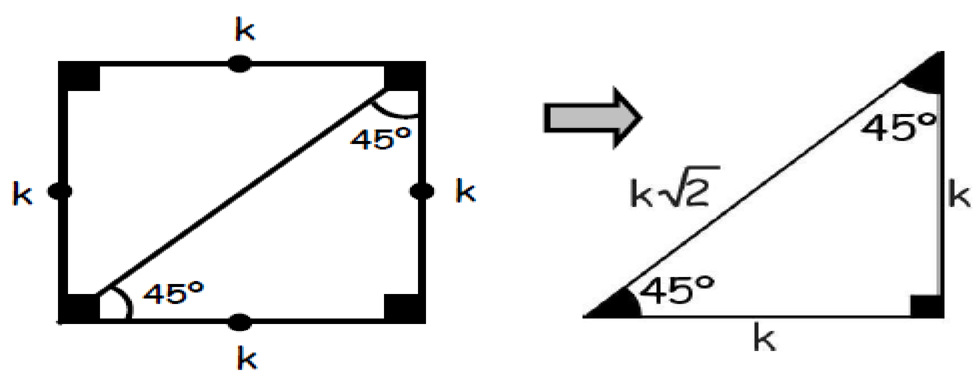
La diagonal divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos iguales cuyos ángulos miden 90º, 45º y 45º.Si aplicamos el teorema de Pitágoras obtenemos la diagonal en función del lado: $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

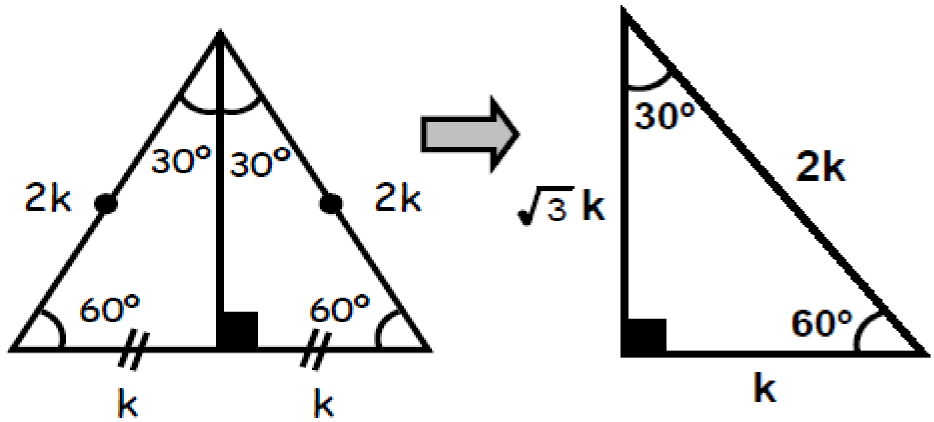


Razón	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$sen\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$tan\ \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
$ctg\ \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0
$sec\ \alpha$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	-	-1	-
$csc\ \alpha$	-	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	-	-1

Triangulo notable de 45◦

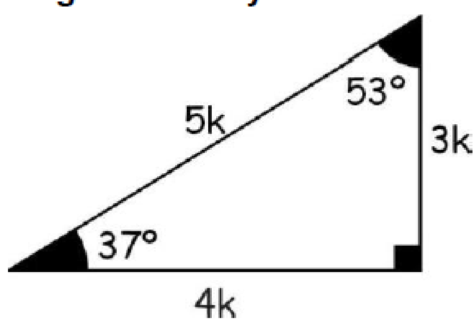


Triangulo notable de 30◦ Y 60◦

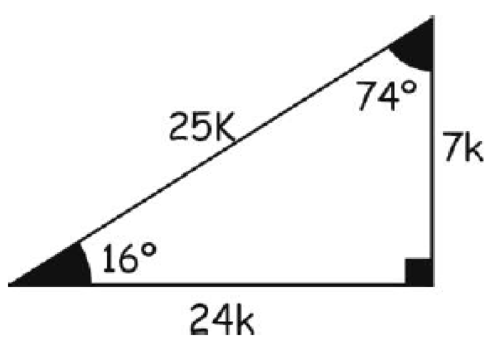


Triángulos Notables Aproximados

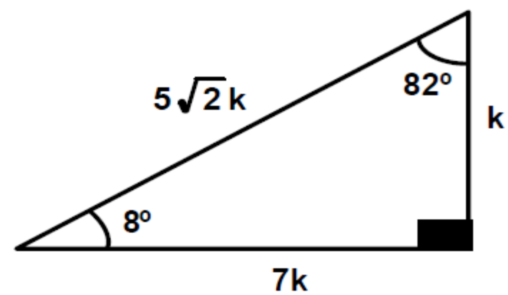
a) Triángulo de 37° y 53°



b) Triángulo de 16° y 74°



c) Triángulo de 8º y 82º



2.5 CASOS DE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Como ya se ha definido, un triángulo rectángulo es un triángulo con un Angulo recto. El lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los otros dos lados se llaman catetos.

Teorema de Pitágoras.

En cada triangulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. E s decir:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

A esta relación se le llama pitagórica.

Aplicación del teorema de Pitágoras.

Ejemplo 1.- Los catetos de un triángulo rectángulo miden 12 cm y 5cm ¿Cuánto mide la hipotenusa?

Solución.- $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ $\qquad a = \sqrt{12^2 + 5^2}$

$$\boldsymbol{a = 13}$$

2.5.1 PRACTICA DE RESOLUCION DE TRIANGULOS.

Ejercicio 1: Se sabe que la diagonal del cuadrado mide 7 *cm*. ¿Cuál es la longitud del lado?.

Ejercicio 2: En un triángulo equilátero la altura mide 3 *cm*. ¿Cuánto miden los lados?

Ejercicio 3: La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 *cm* y uno de los catetos mide el triple que el otro.

a) ¿Cuánto miden los catetos?

b) Calcular el área.

Ejercicio 4: Determinar en cada caso las medidas de las diagonales de los rectángulos de base **b** y altura **h**

a) **b =** 8 *cm* **h** = 6 *cm* b) **b** = 4 *cm* **h =** 8 *cm*

Ejercicio 5: Calcular la medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado **L** mide:

a) **L**= 2 *m* b) **L=** 0,6 *m* c) **L=** 5 *dm*

Ejercicio 6: Un tramo de carretera forma un ángulo de 15° con la horizontal. Al recorrer 200 *m* por la carretera, ¿Cuántos metros se ha ascendido en vertical?

Ejercicio 7: De un rombo se conoce una diagonal, 24 *cm*, y el lado, 13 *cm*. Encontrar la medida de la otra diagonal.

Ejercicio 8: Encontrar la altura de un trapecio isósceles cuyos lados paralelos miden 4 *cm* y 9 *cm* y los otros 6,5 *cm*.

2.6 GENERALIZACIÓN DE LAS DEFINICIONES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

¿Cómo podríamos generalizar las definiciones de las razones trigonométricas aplicadas a ángulos de cualquier magnitud, de tal manera que las definiciones utilizadas antes sean todavía aplicables?

Utilizando las coordenadas de un punto cualquiera P(x, y), del lado terminal de un ángulo o, tracemos una perpendicular $\overline{MP}$, que permita enfocar la situación de acuerdo con las consideraciones siguientes.

En el plano cartesiano, los catetos opuestos y adyacente del ángulo α. (en términos de elementos del triángulo rectángulo), resultan ser la ordenada y la abscisa del punto P del lado terminal del ángulo α, siendo la hipotenusa la distancia del origen al punto P(x, y), según se muestra en la figura 2.29.

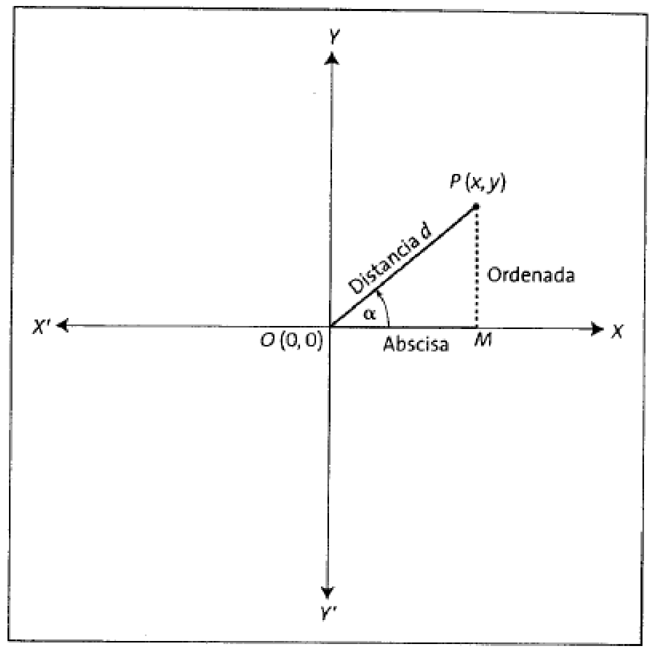


Figura 2.29 Elementos de un triángulo rectángulo en el plano cartesiano

Resulta entonces que los elementos del triángulo rectángulo son:

- Cateto opuesto al $\measuredangle\alpha$: $sera\ el\ segmento\ de\ recta\ \ MP$.
- Cateto adyacente $\measuredangle\alpha\ sera\ el\ segmento\ de\ recta\ OM$
- Hipotenusa: será el segmento de recta OP.

Las coordenadas del punto P del lado terminal del ángulo a. son:

- Abscisa x = OM.
- Ordenada y = MP.

Como siempre se puede utilizar un punto cualquiera P(x,y) del lado terminal de cualquier ángulo $\measuredangle\alpha$, las definiciones construidas en términos de las coordenadas del punto P(x, y) y de su distancia al origen de coordenadas d = OP satisfacen el requerimiento de generalidad. Por lo que se proponen las siguientes definiciones para las razones trigonométricas.

$$sen\alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{Ordenada\ de\ P}{Distancia\ de\ P\ al\ origen} = \frac{y}{d}$$

$$cos\alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{Abscisa\ \ de\ P}{Distancia\ de\ P\ al\ origen} = \frac{x}{d}$$

$$\tan\alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{Ordenada\ de\ P}{Abscisa\ de\ P} = \frac{y}{x}$$

$$Cot\ \alpha = \frac{OM}{MP} = \frac{Abscisa\ de\ P}{Ordenada\ de\ P} = \frac{x}{y}$$

$$sec\ \alpha = \frac{OP}{OM} = \frac{Distancia\ de\ P\ al\ origen}{Abscisa\ de\ P} = \frac{d}{x}$$

$$csc\ \alpha = \frac{OP}{MP} = \frac{Distancia\ de\ P\ al\ origen}{Ordenada\ de\ P} = \frac{d}{y}$$

Recuerda que al conocer el valor de las razones trigonométricas de un ángulo α basta con conocer las coordenadas (x, y) de algún punto de su lado terminal, coincidiendo su lado inicial con el semieje positivo de las abscisas.

2.7 CÁLCULO DE LOS VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE CUALQUIER MAGNITUD.

En las tablas trigonométricas de valores sólo se dan los de las funciones trigonométricas de ángulos entre 0° y 90° (ubicados en el primer cuadrante). Ya hemos visto que los ángulos pueden estar ubicados en cualquiera de los otros cuadrantes del plano cartesiano (esto es, en el segundo, tercero o cuarto), pueden ser negativos o incluso mayores de 360°. Para calcular los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos que son mayores de 90°, podemos hacer uso de las tablas de valores existentes, utilizando los criterios de reducción que se plantearán a continuación y que nos permitirán determinar los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo.

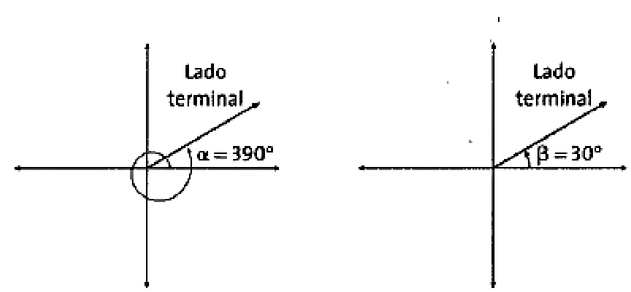
Todos los ángulos cuyo lado terminal sea el mismo tienen los mismos valores para sus funciones trigonométricas correspondientes.

El criterio anterior significa que para cualquier ángulo a, mayor que o igual a 360°, o negativo, existe un ángulo β cuya medida estará comprendida entre 0° y 360° con el mismo lado terminal, y por lo tanto los valores de sus funciones trigonométricas correspondientes serán iguales. Esto es,

- sen α =sen β. Por ejemplo, sen 390° = sen 30° (véase la figura 2.37).
- cos α =cos β. Por ejemplo, cos 520° = cos 160°.
- tan α =tan β. Por ejemplo, tan (-210°) = tan 150°.

Figura 2.37

Representación gráfica de un ángulo mayor de 360° y de uno igual a 30°, los cuales tienen su lado terminal en la misma posición.



Así, para calcular los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, bastará saber cómo calcular los valores para ángulos a comprendidos entre 0° y 360°, Y luego aplicar los criterios de reducción a dichos ángulos, lo cual nos permitirá hacer uso de las tablas existentes.

La estrategia que se debe seguir se explica a continuación. Utilizando como apoyo el círculo unitario de radio 1 (*d* = 1) Y centro en el origen *O* (O, 0) Y empleando los conceptos de simetría, encontraremos los valores de las funciones de un ángulo α, mediante un ángulo agudo β, ubicado en el primer cuadrante y cuyas funciones sean, en valor absoluto, iguales a las del ángulo α. Los signos de las funciones trigonométricas de (l dependerán del cuadrante en que se ubique su lado terminal.

2.7.1 I ÁNGULOS POSITIVOS ENTRE 90° Y 360°.

A. Caso de un ángulo α cuyo lado terminal quede ubicado en el segundo cuadrante (90° < ∡ α < 180°).

Para el caso de un ángulo α que sea mayor de 90° pero menor de 180°, sus funciones trigonométricas están dadas por las coordenadas del punto *P'(-x,y)*. Se tiene que el punto *P(x,y)*, simétrico a *P'* con respecto al eje Y, determina un ángulo β en el primer cuadrante, cuyas funciones dependen de las coordenadas de *P* (véase la figura 2.38).

Por lo que, según las definiciones de las funciones, se tiene que

$$sen\,\alpha = \frac{y}{1} \quad y \quad sen\,\beta = \frac{y}{1}, \quad por\ lo\ que \quad sen\,\alpha = sen\beta;$$

$$cos\,\alpha = \frac{-x}{1} \quad y \quad cos\,\beta = \frac{x}{1}, \quad por\ lo\ que \quad cos\,\alpha = -cos\beta,$$

$$tan\,\alpha = \frac{y}{-x} \quad y \quad tan\,\beta = \frac{y}{x}, \quad por\ lo\ que \quad tan\,\alpha = -tan\beta.$$

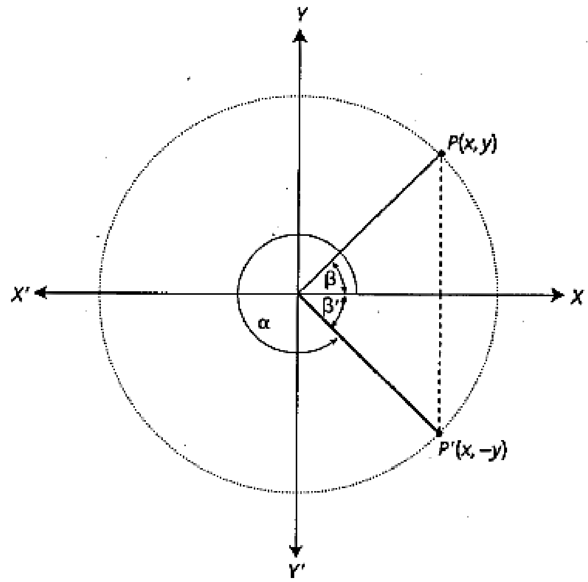


Figura 2.40

OP= radio= d= 1

Como β es igual a β' (se puede demostrar), se tiene que α = (360° -β), por lo que se obtienen las siguientes igualdades:

$$sen(360° - \beta) = -sen\beta \qquad \csc(360° - \beta) = -csc\beta$$

$$cos(360° - \beta) = cos\beta \qquad \sec(360° - \beta) = sec\beta$$

$$tan(360° - \beta) = -tan\beta \qquad \cot(360° - \beta) = -cot\beta$$

Así que en el cuarto cuadrante la función coseno y su recíproca, la secante, son positivas

• Ejemplo 2.12

Expresa las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos aplicando el criterio de reducción que le corresponde a los ángulos ubicados en el segundo cuadrante.

A. **α=150°.**

Solución

$$sen\ 150° = sen(180° - 30°) = sen\ 30°$$

$$cos\ 150° = cos(180° - 30°) = -cos\ 30°$$

$$tan\ 150° = tan(180° - 30°) = -tan\ 30°$$

$$cot\ 150° = cot(180° - 30°) = -cot\ 30°$$

$$sec\ 150° = sec(180° - 30°) = -sec\ 30°$$

$$csc\ 150° = csc(180° - 30°) = csc\ 30°$$

B. α=165°.

Solución

$$sen\ 165° = sen(180° - 15°) = sen\ 15°$$

$$cos\ 165° = cos(180° - 15°) = -cos\ 15°$$

$$tan\ 165° = tan(180° - 15°) = -tan\ 15°$$

$$cot\ 165° = cot(180° - 15°) = -cot\ 15°$$

$$sec\ 165° = sec(180° - 15°) = -sec\ 15°$$

$$csc\ 165° = csc(180° - 15°) = csc\ 15°$$

B. Caso de un ángulo a cuyo lado terminal quede ubicado en el tercer cuadrante ($180° < \measuredangle\ \alpha < 270°$)

Ahora consideremos el caso en que *P(x, y)*, simétrico a *P'(-x, -y)* con respecto al origen 0, (véase la figura 2.39) determina un ángulo β en el primer cuadrante.

Por definición de las funciones tenernos que

$sen\ \alpha = \frac{-y}{1} \qquad y \qquad sen\ \beta = \frac{y}{1},$

$Por\ lo\ que \quad sen\ \alpha = -sen\ \beta;$

$cos\ \alpha = \frac{-x}{1} \qquad y \qquad cos\ \beta = \frac{x}{1},$

$Por\ lo\ que \quad cos\ \alpha = -cos\ \beta; y$

$tan\ \alpha = \frac{-y}{-x}$ y $tan\ \beta = \frac{y}{x}$,

$Por\ lo\ que \quad tan\ \alpha = tan\ \beta.$

Siendo que β es igual a β, podemos decir que el ángulo α es igual a 180° + β.Así, se tienen las siguientes igualdades:

$sen(180° + \beta) = -sen\ \beta$

$csc(180° + \beta) = -csc\ \beta$

$cos(180° + \beta) = -cos\ \beta$

$sec(180° + \beta) = -sec\ \beta$

$tan(180° + \beta) = tan\ \beta$

$cot(180° + \beta) = cot\ \beta$

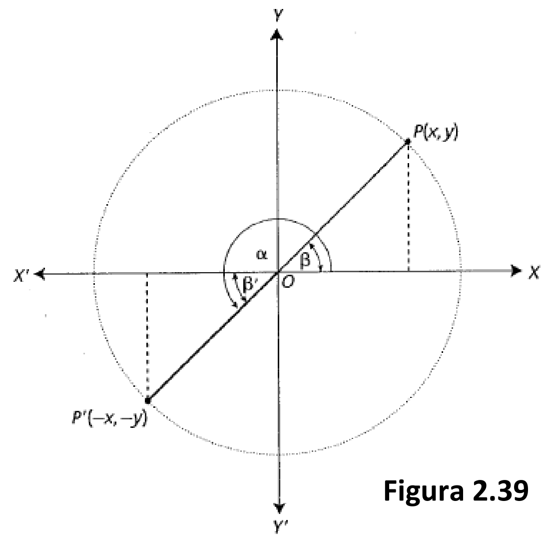


Figura 2.39

OP= radio=d=1

Como el ángulo (180° +β) tiene su lado terminal en el tercer cuadrante, las funciones tangente y su recíproca, la cotangente, son positivas.

- **Ejemplo 2.13**

Expresa las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos aplicando el criterio de reducción para los ángulos cuyo lado terminal está en el tercer cuadrante.

A. α= 225°.

Solución

$$sen\ 225° = sen(180° + 45°) = -sen\ 45°$$

$$cos\ 225° = cos(180° + 45°) = -cos\ 45°$$

$$tan\ 225° = tan(180° + 45°) = tan\ 45°$$

$$cot\ 225° = cot(180° + 45°) = cot\ 45°$$

$$sec\ 225° = sec(180° + 45°) = -sec\ 45°$$

$$csc\ 225° = csc(180° + 45°) = -csc\ 45°$$

B. α=210°.

Solución

$$sen\ 210° = sen(180° + 30°) = -sen\ 30°$$

$$cos\ 210° = cos(180° + 30°) = -cos\ 30°$$

$$tan\ 210° = tan(180° + 30°) = tan\ 30°$$

$$cot\ 210° = cot(180° + 30°) = cot\ 30°$$

$$sec\ 210° = sec(180° + 30°) = -sec\ 30°$$

$$csc\ 210° = csc(180° + 30°) = -csc\ 30°$$

C. Caso de un ángulo a cuyo lado terminal quede ubicado en el cuarto cuadrante (270° < ∡ α <360°).

En este caso el punto *P(x, y)*, simétrico a *P'(x, -y)* con respecto al eje *X*, determina un ángulo β en el primer cuadrante (figura 2.40). Por definición, nuevamente tenernos que:

$$sen\ \alpha = \frac{-y}{1} \qquad y \qquad sen\ \beta = \frac{y}{1}, \qquad por\ lo\ que \qquad sen\ \alpha = -sen\ \beta;$$

$$cos\ \alpha = \frac{x}{1} \qquad y \qquad sen\ \beta = \frac{x}{1}, \qquad por\ lo\ que \qquad cos\ \alpha = cos\ \beta, y$$

$$tan\ \alpha = \frac{-y}{x} \qquad y \qquad tan\ \beta = \frac{y}{x}, \qquad por\ lo\ que \qquad tan\ \alpha = -tan\ \beta.$$

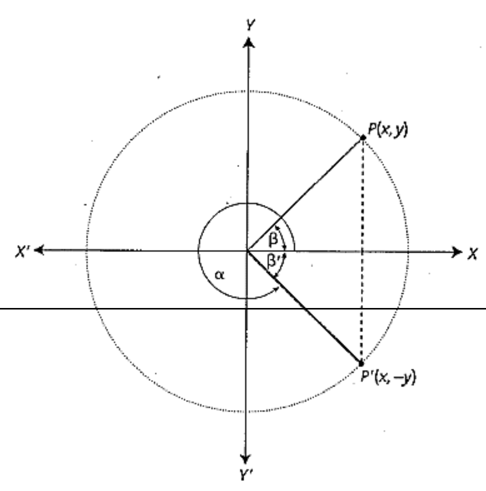


Figura 2.40

OP=radio=d=1

Como β es igual a β' (se puede demostrar), se tiene que α = (360° -β), por lo que se obtienen las siguientes igualdades:

$$sen\,(360° - \beta) = -sen\,\beta \qquad \csc\,(360° - \beta) = -csc\,\beta$$

$$cos\,(360° - \beta) = -cos\,\beta \qquad sec\,(360° - \beta) = sec\,\beta$$

$$tan\,(360° - \beta) = -tan\,\beta \qquad cot\,(360° - \beta) = -cot\,\beta$$

Así que en el cuarto cuadrante la función coseno y su recíproca, la secante, son positivas

• Ejemplo 2.14

Expresa las funciones trigonométricas de un ángulo de 320° aplicando el criterio de reducción para los ángulos cuyo lado terminal está en cuarto cuadrante.

Solución

Un ángulo de 320° tiene su lado terminal en el cuarto cuadrante, por lo que se puede expresar como

$$360° = (360° - 40°)$$

Así, para el ángulo β = 40°, mediante las identidades correspondientes, se tiene que

$$\boldsymbol{sen\,320° = sen(360° - 40°) = -sen40°}$$

$$\boldsymbol{cos\,320° = cos(360° - 40°) = cos40°}$$

$$\boldsymbol{tan\,320° = tan(360° - 40°) = -tan40°}$$

$$\boldsymbol{cot\,320° = cot(360° - 40°) = -cot40°}$$

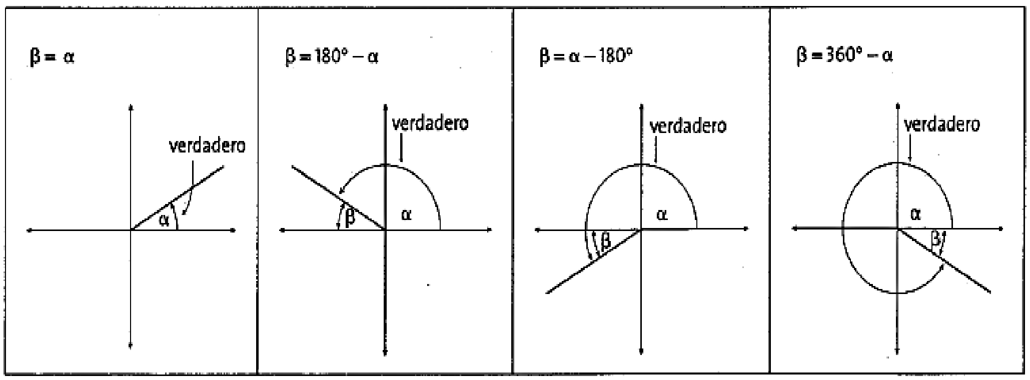
$$\boldsymbol{sec\,320° = sec(360° - 40°) = sec40°}$$

$$\boldsymbol{csc\,320° = csc(360° - 40°) = -csc40°}$$

Las gráficas de la figura 2.41 ilustran una manera de calcular fácilmente el valor del ángulo β (ángulo agudo al que denominaremos "relacionado"), dependiendo de la posición del lado terminal del ángulo α (al que denominaremos "verdadero") en' el plano de ejes coordenados.

Figura 2.41

Ángulos α y β con 0° < ∡ α < 360° Y β < 90°en los cuatro



2.7.2 ÁNGULOS MAYORES DE 3600 Y ÁNGULOS NEGATIVOS

¿Qué criterio se debe aplicar en los casos en que el ángulo o: sea mayor de 360° o negativo?

Ilustremos estos casos mediante unos cuantos ejemplos.

• Ejemplo 2.15

En los siguientes incisos, dado un ángulo o: mayor de 360° o negativo, indicar cuáles son sus funciones trigonométricas en términos de un ángulo agudo relacionado.

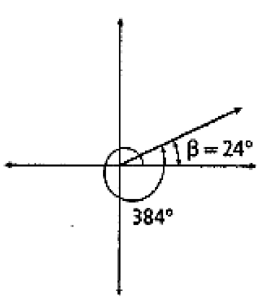


Figura 2.42 Ángulo α mayor de 360°con lado terminal en el primer cuadrante.

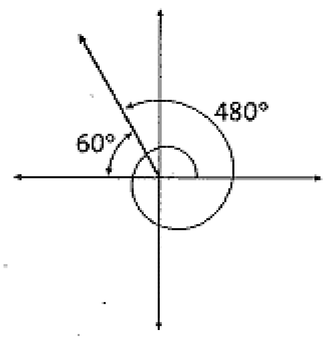
A. α = 384°: En este caso, se considera el número de revoluciones completas que da el lado terminal del ángulo α, quedando un excedente de 24°. Por lo que el lado terminal quedará ubicado en el primer cuadrante, obteniéndose entonces que

$$sen\ 384° = sen\ 24°$$

$$cos\ 384° = cos\ 24°$$

$$tan\ 384° = tan24°, etcétera.$$

B. α: = 480°: En este caso el lado terminal da una vuelta completa y queda un excedente de 120°, por lo que el lado terminal queda ubicado en el segundo cuadrante y el ángulo β = 60°. Así, los valores de las funcione trigonométricas de 480° son:



$$sen\ 480° = sen\ 120°$$

$$cos\ 480° = cos\ 120°$$

$$tan\ 480° = tan\ 120°.$$

Por lo que aplicando el criterio de reducción para ángulos ubicados en el segundo cuadrante queda:

Figura 2.43

Ángulo α mayor de 360° con lado terminal en el segundo cuadrante

$$sen\ 120° = sen\ (180° - 60°) = sen\ 60°$$

$$cos\ 120° = cos\ (180° - 60°) = -cos\ 60°$$

$$tan\ 120° = tan\ (180° - 60°) = -tan\ 60°$$

Finalmente

$$sen\ 480° = sen\ 60°$$

$$cos\ 480° = -\ cos\ 60°$$

$$tan\ 480° = -tan\ 60°$$

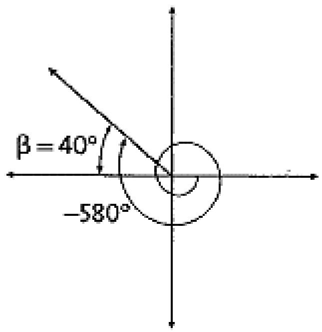


Figura 2.44

Ángulo de más de una vuelta completa con lado terminal en el segundo cuadrante

C. α:=-580°: Por ser el ángulo α negativo, su sentido de giro será en el sentido de las manecillas del reloj (sentido horario). Da una vuelta completa y avanza 220° por lo que β = 40°.

Los valores de las funciones trigonométricas de -580° son:

$$sen(-580°) = sen(-220°)$$

$$cos(-580°) = cos(-220°)$$

$$tan(-580°) = tan(-220°)$$

Aplicando el criterio de reducción de ángulos en el segundo cuadrante, tenernos:

$$sen(-220°) = sen(180° - 40°) = sen\ 40°$$

$$cos(-220°) = cos(180° - 40°) = -cos\ 40°$$

$$tan(-220°) = tan(180° - 40°) = -tan\ 40°$$

Del ejemplo 2.15 podemos obtener las conclusiones siguientes:

• Los criterios de reducción para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo se cumplen para cualquier ángulo, incluyendo a los mayores de 360° o negativos.

• Cuando el ángulo a es negativo (giro en el sentido horario), β será el ángulo formado por el lado terminal de α y el eje X, como se ilustra en la figura 2.45.

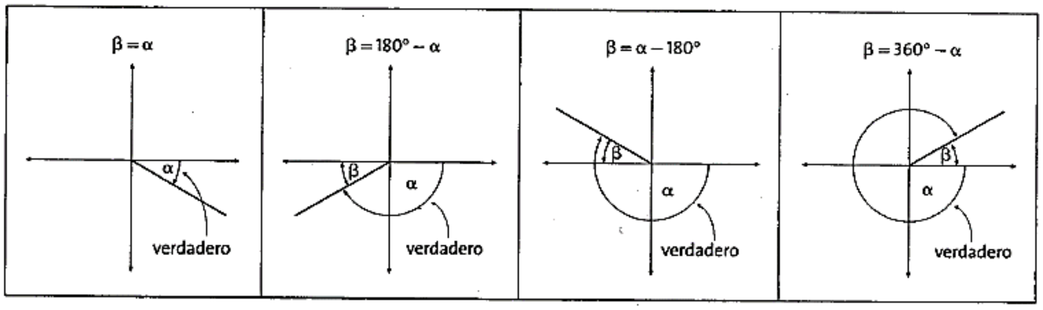


Figura 2.45

Criterios de reducción para ángulos negativos.

Determinar las funciones trigonométricas de a en términos de un ángulo agudo relacionado

A. α =-145°. Siendo el ángulo negativo, el sentido de giro de su lado terminal es en el sentido horario. Por lo que el ángulo queda ubicado en el tercer cuadrante. El ángulo agudo relacionado que en este caso es β = 35°. Aplicando el criterio de reducción correspondiente y teniendo en cuenta los signos de las funciones en ese cuadrante, se tiene que

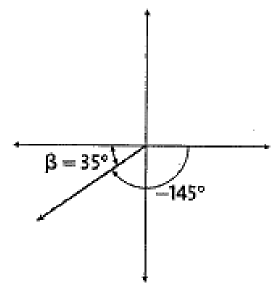


Figura 2.46

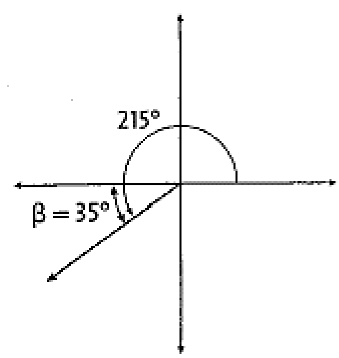
Ángulo a negativo con

$$sen(-145°) = sen(180° + 35°) = -sen\,35°$$

$$cos(-145°) = cos(180° + 35°) = -cos\,35°$$

$$tan(-145°) = tan(180° + 35°) = tan\,35°, etcétera$$

uadrante; rando el uadrante



$$sen(215°) = sen(180° + 35°) = -sen\,35°$$

$$cos(215°) = cos(180° + 35°) = -cos\,35°$$

$$tan(215°) = tan(180° + 35°) = tan\,35°, etcétera.$$

Figura 2.47

C. α = 505°: Como se puede observar en la figura 2.48, el ángulo queda ubicado en el tercer cuadrante; el ángulo agudo relacionado es β =35°. Por lo que considerando los signos de las funciones en ese cuadrante se tiene que

$$sen(505°) = sen(180° + 35°) = -sen\,35°$$

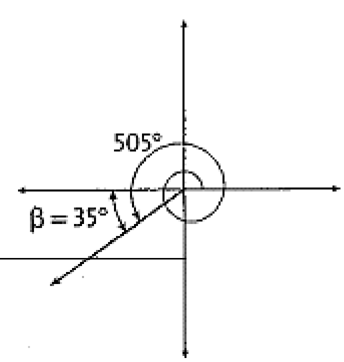


Figura 2.48

$$cos(505°) = cos(180° + 35°) = -cos\ 35°$$

$$tan(505°) = tan(180° + 35°) = tan\ 35°, etcétera.$$

De acuerdo con los resultados obtenidos en los incisos [A], [B] y [C] del ejemplo 2.16, se puede decir que:

Todos los ángulos con el mismo lado terminal, tienen los mismos valores para sus funciones trigonométricas correspondientes.

Con los criterios hasta aquí planteados, estamos en condiciones de calcular los valores de las funciones trigonométricas de ángulos de cualquier magnitud. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.17

Halla los valores de las funciones trigonométricas indicadas, aplicando el criterio que corresponda para el cálculo del ángulo agudo relacionado β.

a) Cos 836°: como el ángulo de 836° tiene el mismo lado terminal que 116°, a causa de que el lado terminal del ángulo de dos vueltas completas (720°), y continúa su desplazamiento hasta ubicarse en el segundo cuadrante (esto es, 836° = 116° + 720°), entonces, bajo criterio de reducción del inciso (a) del ejemplo 2.15.

$$\cos 836° = \cos 116°$$

$$como\ \alpha = 116°, \beta = 180° - 116° = 64°, por\ lo\ que$$

$$Cos\ 836° = \cos 116° = \cos(180° - 64°)$$

$$\cos 836° = \cos 116° = -\cos 64°$$

Finalmente:

$$\cos 836° = -0.43837.$$

b) sen (-55°): como el ángulo es negativo, su lado terminal es el mismo que el del ángulo de 305°, el cual está ubicado en el cuarto cuadrante. Luego, aplicando un criterio similar al del inciso (c) del ejemplo 2.15, se tiene que

$$sen(-55°) = sen(350° - 55°) = -sen55° = -0.81915$$

Así

$$sen(-55°) = -sen55° = -0.81915$$

2.7.3 ÁNGULOS QUE NO SON AGUDOS RELACIONADOS CON LOS ÁNGULOS NOTABLES DE 30°, 60° Y45°

Aplicando los conceptos estudiados para el cálculo de los valores de las funciones de los ángulos de cualquier magnitud y conocidos los valores de los ángulos especiales de 30°, 60° Y45° (véase la sección 2.2.4), podemos calcular con exactitud los valores de las funciones de cualquier ángulo que se relacione con ellos.

Ejemplo 2.18.
Calcula los valores de las funciones trigonométricas para él ángulo de 315°.

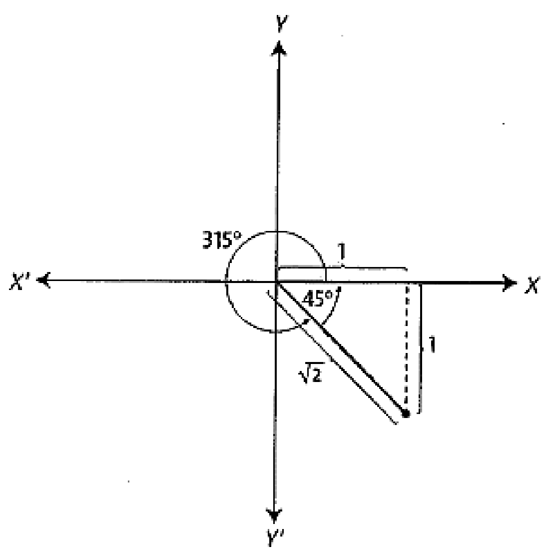


Figura 2.49
Representación gráfica para la obtención de los valores de las funciones trigonométricas del ángulo de 315°

El lado terminal del ángulo está ubicado en el cuadrante; por lo tanto aplicando el criterio de reducción correspondiente, siendo β= 360° -315° =45°, se tiene que:

$$sen\ 315° = sen(360° - 45°) = -sen45°$$

$$\cos 315° = cos(360° - 45°) = \cos 45°$$

$$\tan 315° = tan(360° - 45°) = -\tan 45°$$

$$\cot 315° = cot(360° - 45°) = -\cot 45°$$

$$\csc 315° = csc(360° - 45°) = -\csc 45°$$

Por lo que tenemos los siguientes resultados:

Valores de las funciones trigonométricas del ángulo de 315°	
$\text{sen } 315° = -\text{sen } 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 315° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan 315° = -\tan 45° = -1$	$\cot 315° = -\cot 45° = -1$
$\sec 315° = \sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$	$\csc 315° = -\csc 45° = -\frac{\sqrt{2}}{1} = -\sqrt{2}$

El lector comprobará en las actividades de aprendizaje del tema, que el mismo criterio es válido para los ángulos 30° y 60°.

Resumen:

Identidades de las funciones de (180° - β)

Función de (180° – β)	Función trigonométrica
sen (180° – β)	sen β
cos (180° – β)	–cos β
tan (180° – β)	–tan β
cot (180° – β)	–cot β
sec (180° – β)	–sec β
csc (180° – β)	csc β

Identidades de las funciones de (180 + β)

Función de (180° + β)	Función trigonométrica
sen (180° + β)	–sen β
cos (180° + β)	–cos β
tan (180° + β)	tan β
cot (180° + β)	cot β
sec (180° + β)	–sec β
csc (180° + β)	–csc β

Identidades de las funciones de (360° - β)

Función de (360° – β)	Función trigonométrica
sen (360° – β)	–sen β
cos (360° – β)	cos β
tan (360° – β)	–tan β
cot (360° – β)	–cot β
sec (360° – β)	sec β
csc (360° – β)	–csc β

2.7.4 ACTIVIDADES GENERALES

1.-Obtén los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos siguientes, aplicando de criterio de reducción que les corresponda.

a) 120°
b) 135°
c) 150|
d) 210°
e) 225°
f) 240°
g) 300°
h) 315°
i) 330°

2.- Traza las gráficas de la ubicación de los siguientes ángulos e indica los signos de cada una de sus funciones trigonométricas.

a) 295°
b) 415°
c) 565°
d) 785°
e) -284°

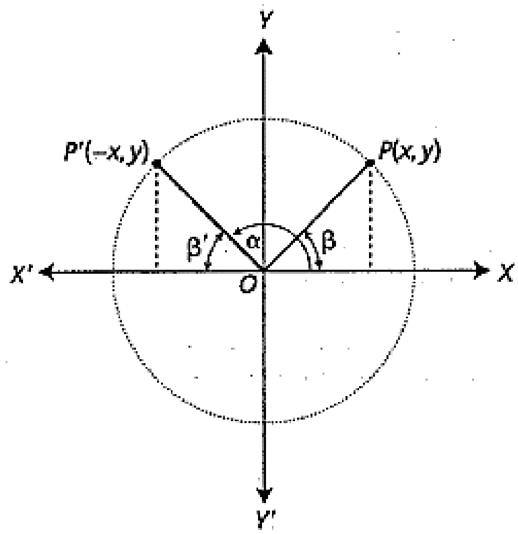
3.- Expresa las funciones trigonométricas indicadas de los siguientes ángulos en términos de sus respectivos ángulos relacionados.

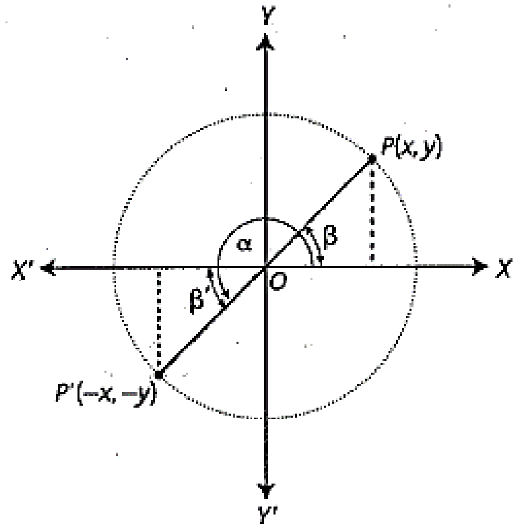
a) tan 235°
b) cos 2925°
c) sec 912°
d) sen 340°
e) csc (-230°)

4.- Calcula los valores de las funciones que se piden, indicando el ángulo agudo relacionado que corresponda en cada caso.

a) Sec 1920°
b) tan (-410°)
c) cos 912°
d) csc 296°
e) cot 164°

5.- Demuestra que los ángulos β y β’ señalados en las siguientes gráficas son iguales





6.- En las dos gráficas anteriores se puede observar que β es un ángulo ubicado en el primer cuadrante β’ está ubicado en el segundo y tercer cuadrante respectivamente; elabora la gráfica correspondiente cuando β’ está ubicado en el cuarto cuadrante y demuestra que su media es igual a la de β.

2.8 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS QUE LIMITAN LOS CUADRANTES DEL PLANO CARTESIANO

Los ángulos cuyo terminal coinciden con algunos los ejes del plano de coordenadas rectangulares miden 0°, 90°, 180°, 270° o 360°, como se muestra en la figura 2.50 . A estos ángulos especiales se les denomina *ángulos cuadrantales.*

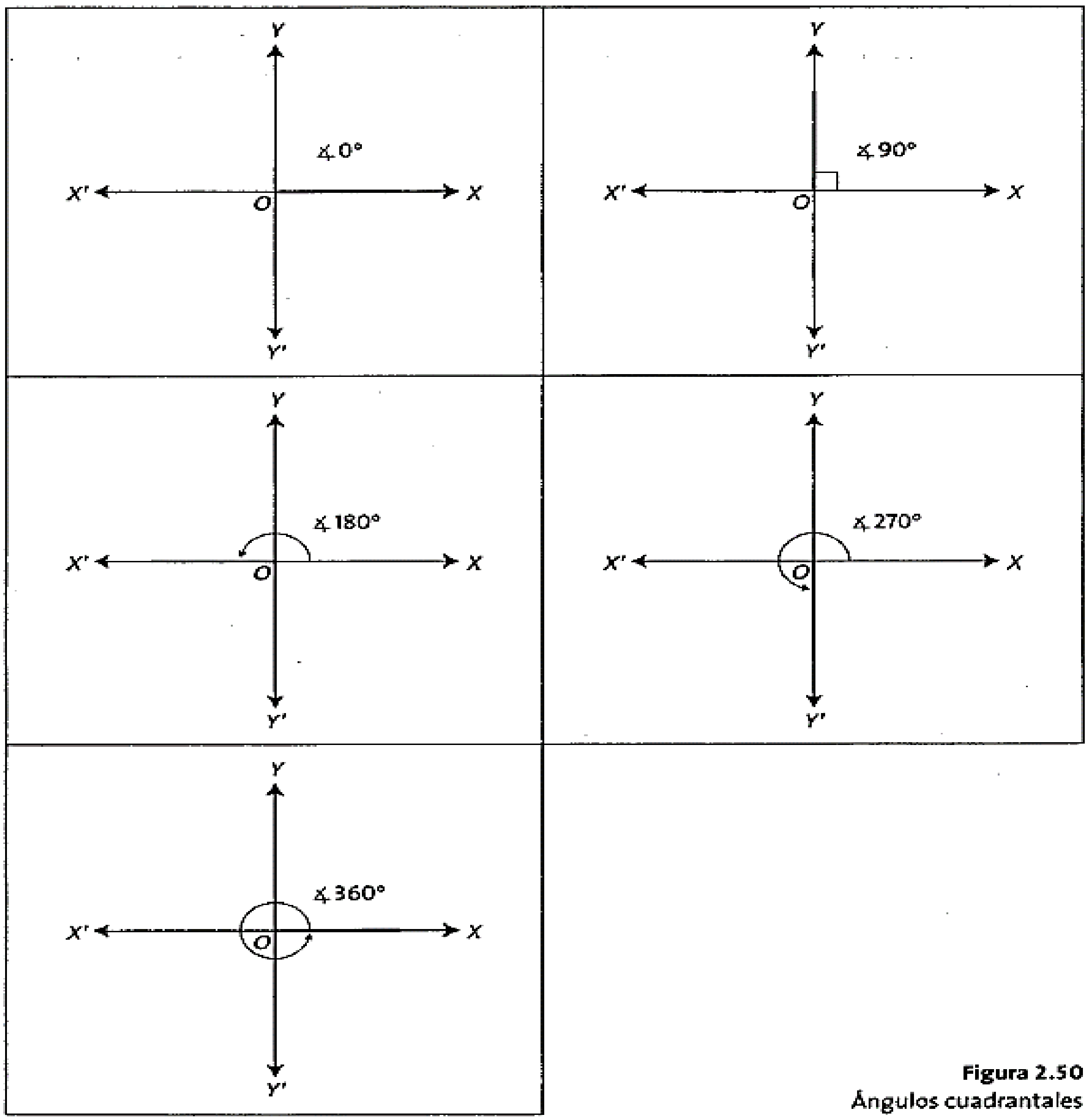


Figura 2.50
Ángulos cuadrantales

2.8.1. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DE 0°

Utilicemos nuevamente el círculo unitario (radio = 1 Y centro en el origen de coordenadas). Localicemos el punto donde el lado terminal del ángulo, se interseca con la circunferencia de este círculo, P(l, O). Considerando las definiciones de las funciones trigonométricas, se tiene que:

$$sen\ 0° = \frac{Ordenada}{Distancia} = \frac{y}{d} = \frac{0}{1} = 0. \qquad sen\ 0° = 0$$

$$\cos 0° = \frac{Abscisa}{Distancia} = \frac{x}{d} = \frac{1}{1} = 1. \qquad \cos 0° = 1$$

$$\tan 0° = \frac{Ordenada}{Abscisa} = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0. \qquad \tan 0° = 0$$

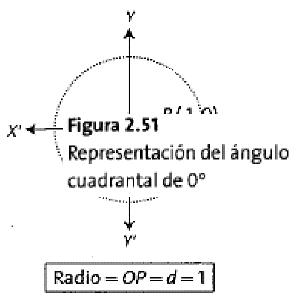


Figura 2.51
Representación del ángulo cuadrantal de 0°

$$cot\ 0° = \frac{Abscisa}{Ordenada} = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} = indefinido. \qquad \cot 0° = indefinido$$

$$sec\ 0° = \frac{Distancia}{Abscisa} = \frac{d}{x} = \frac{1}{1} = 1. \qquad \sec 0° = 1$$

$$\csc 0\,° = \frac{Distancia}{Ordenada} = \frac{d}{y} = \frac{1}{0} = indefinido. \qquad \csc 0° = indefinido$$

2.8.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DE 90°

En la figura 2.52 se puede observar que la abscisa del punto P es 0 y su ordenada es igual a la medida del radio 1. Empleando estos datos, se calculan los valores de las funciones trigonométricas del ángulo de 90°.

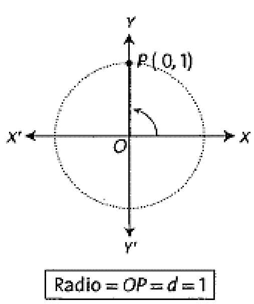


Figura 2.52
Representación del ángulo cuadrantal de 90°

$$sen\ 90° = \frac{Ordenada}{Distancia} = \frac{y}{d} = \frac{1}{1} = 1. \qquad sen\ 90° = 1$$

$$\cos 90° = \frac{Abscisa}{Distancia} = \frac{x}{d} = \frac{0}{1} = 0. \qquad \cos 90° = 0$$

$$\tan 90° = \frac{Ordenada}{Abscisa} = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = indefinido. \qquad \tan 90° = indefinido$$

$$cot\ 90° = \frac{Abscisa}{Ordenada} = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0. \qquad \cot 90° = 0$$

$$sec\ 90° = \frac{Distancia}{Abscisa} = \frac{d}{x} = \frac{1}{1} = indefinido. \qquad \sec 90° = indefinido$$

$$\csc 90\ ° = \frac{Distancia}{Ordenada} = \frac{d}{y} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \csc 90° = 1$$

2.8.3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO 180°

De acuerdo con los datos ilustrados en la figura 2.53, r=1, x= -1, y y= 0. Así se obtienen los siguientes valores de las funciones de 180°.

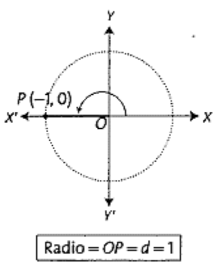


Figura 2.53
Representación del ángulo cuadrantal de 180°

$$sen\ 180° = \frac{Ordenada}{Distancia} = \frac{y}{d} = \frac{0}{1} = 0. \qquad sen\ 180° = 0$$

$$\cos 180° = \frac{Abscisa}{Distancia} = \frac{x}{d} = \frac{-1}{1} = -1. \qquad \cos 180° = -1$$

$$\tan 180° = \frac{Ordenada}{Abscisa} = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0. \qquad \tan 180° = 0$$

$$cot\ 180° = \frac{Abscisa}{Ordenada} = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = indefinido. \qquad \cot 180° = indefinido$$

$$sec\ 180° = \frac{Distancia}{Abscisa} = \frac{d}{x} = \frac{1}{-1} = -1. \qquad \sec 180° = -1$$

$$\csc 180\ ° = \frac{Distancia}{Ordenada} = \frac{d}{y} = \frac{1}{0} = indefinido. \qquad \csc 180° = indefinido$$

2.8.4. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO 270°.

De acuerdo con los datos ilustrados en la figura 2.54, r=1, x= 0 y y= -1. Se obtienen así los valores de las funciones trigonométricas del ángulo de 270°.

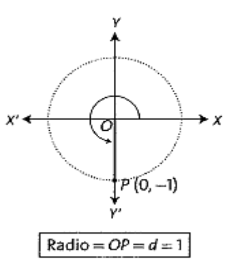


Figura 2.54
Representación del ángulo cuadrantal de 270°

$$sen\ 270° = \frac{Ordenada}{Distancia} = \frac{y}{d} = \frac{-1}{1} = -1. \qquad sen\ 270° = -1$$

$$\cos 270° = \frac{Abscisa}{Distancia} = \frac{x}{d} = \frac{0}{1} = 0. \qquad \cos 270° = 0$$

$$\tan 270° = \frac{Ordenada}{Abscisa} = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} = indefinido. \qquad \tan 270° = indefinido$$

$$cot\ 270° = \frac{Abscisa}{Ordenada} = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0. \qquad\qquad \cot\ 270° = 0$$

$$\sec 270\ ° = \frac{Distancia}{Abscisa} = \frac{d}{x} = \frac{1}{0} = indefini \qquad\qquad \sec 270° = indefinido$$

$$\csc 0\ ° = \frac{Distancia}{Ordenada} = \frac{d}{y} = \frac{1}{-1} = -1. \qquad\qquad \csc 0° = -1$$

2.8.5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO 360°

El lado terminal del ángulo 0° es el mismo que el de 360°, por lo que los valores de sus funciones trigonométricas serán los mismos.

Podemos concluir entonces que los valores de las funciones trigonométricas de todos los ángulos con valores de n(360°), n= 1, 2,3,………, serán los mismos que los del ángulo 0°.

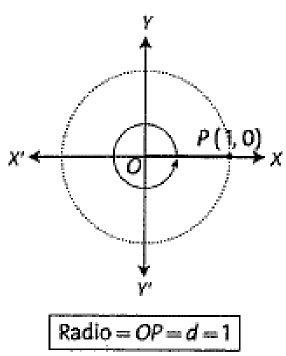


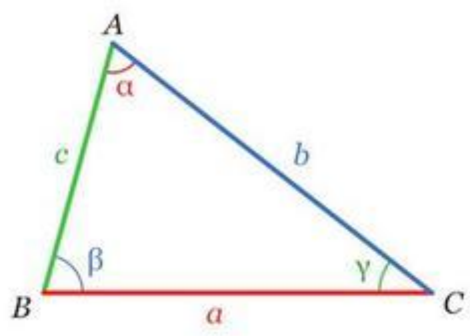
Figura 2.55
Representación del ángulo cuadrantal de 360°

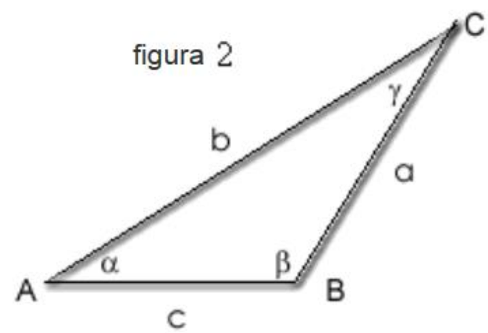
2.9. RESUMEN:

Función	Ángulos Cuadrantales				
	0°	90°	180°	270°	360°
seno	0	1	0	–1	0
coseno	1	0	–1	0	1
tangente	0	indefinido	0	indefinido	0
cotangente	indefinido	0	indefinido	0	indefinido
secante	1	indefinido	–1	indefinido	1
cosecante	indefinido	1	indefinido	–1	indefinido

Un triángulo oblicuángulo es aquél que no es rectángulo. Los elementos de un triángulo oblicuángulo son los tres ángulos, α, β, y γ, y sus tres lados *a, b y c.* Los triángulos oblicuángulos pueden ser de dos tipos:

- *Acutángulo:* Tiene todos sus ángulos agudos.
- *Obtusángulo:* tiene un ángulo obtuso





Para resolver este tipo de triángulos es necesario contar con alguna expresión matemática que se obtenga de las razones trigonométricas. Se tienen dos herramientas matemáticas que se conocen como *ley de senos* y *ley de cosenos*.

A. *Ley de senos*

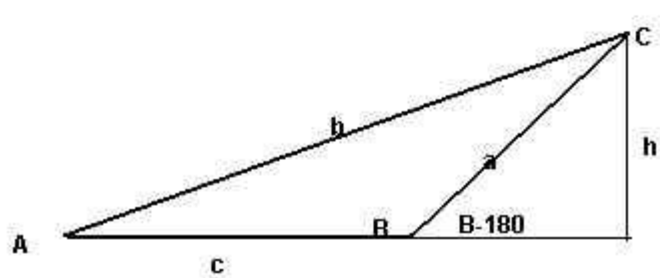
"En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos".

Lo anterior significa que en un triángulo cualquiera se cumple la proporción:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Demostración

En el triángulo obtusángulo ABC de la figura siguiente, en donde AB = c. Se traza la altura correspondiente al lado c y se prolonga dicho lado hasta cruzar con la altura en el punto D, con lo que se obtienen dos triángulos rectángulos Δ ADC y Δ BDC.



D

En el Δ ADC, sen A=$\frac{h}{b}$, de donde:

$\boldsymbol{h= b\ senA}$

En el Δ BDC, sen (180°- B)= $\frac{h}{a}$, pero como el ángulo B es obtuso 90°<B<180°, por lo que, aplicando que sen (180°-B) = sen B. Luego $sen\ B\ = \frac{h}{a}$, de donde: $\boldsymbol{h\ = a\ sen\ B}$

Por lo tanto igualando las anteriores: $\boldsymbol{b\ senA\ = a\ sen\ B}$ de donde obtenemos:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B}$$

Ahora trazando desde el vértice B la altura h al lado b, siendo E el punto de corte entre ellos, tenemos dos triángulos rectángulos: el Δ AEB y el Δ CEB.

En el Δ AEB,$sen\ A = \frac{h}{c}$, de donde : $h = c\ senA$;

En el Δ CEB,$sen\ C = \frac{h}{a}$, de donde: $h = a\ sen\ C$

Igualando: $c\ sen\ A = a\ sen\ C$, Luego: $\frac{a}{sen\ A} = \frac{c}{sen\ C}$

Así, se tiene que: $\boldsymbol{\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}}$

B) ***Ley de cosenos***

“En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de ambos por el coseno del ángulo comprendido entre ellos”.

Es decir, en un triángulo se cumplen las siguientes relaciones de igualdad entre sus elementos:

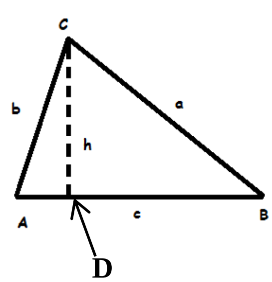
$$a^2 = \ b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cosC$$

Demostración:

En el triángulo acutángulo ABC de la figura, se traza la altura *h* por el vértice C al lado opuesto *c*, siendo D el punto de intersección entre ambos. Se obtienen dos triángulos rectángulos Δ CDB y Δ CAD.



En el Δ CDB: aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos

$$a^2 = h^2 + (DB)^2$$

Pero además, como podemos ver en la figura: $DB = c - AD$

Por lo que al sustituir en la ecuación tendremos:

$$a^2 = h^2 + (c - AD)^2$$

$$a^2 = h^2 + c^2 - 2c(AD) + (AD)^2$$

$$a^2 = h^2 + c^2 + (AD)^2 - 2c(AD)$$

En el Δ CAD: $b^2 = h^2 + (AD)^2$

Y como $\cos A = \frac{AD}{b}$, tenemos: $AD = b \cos A$

Sustituyendo en la ecuación del Δ CDB, tenemos:

$$a^2 = h^2 + c^2 - 2c(b\ cosA)$$

$$\boldsymbol{a^2 = h^2 + c^2 - 2bc\ cosA}$$

2.10 CASOS DE LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Como hemos mencionado anteriormente, resolver un triángulo consiste en determinar las medidas de sus tres lados y sus tres ángulos, a partir de algunos de ellos. Para resolver triángulos oblicuángulos se presentan los cuatro casos siguientes que se caracterizan por los elementos que se conozcan del triángulo:

1. Dos ángulos y el lado común a ellos.
2. Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
3. Tres lados.
4. Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

2.10.1. PRIMER CASO: CUANDO SE CONOCEN DOS ÁNGULOS Y EL LADO COMÚN A ELLOS.

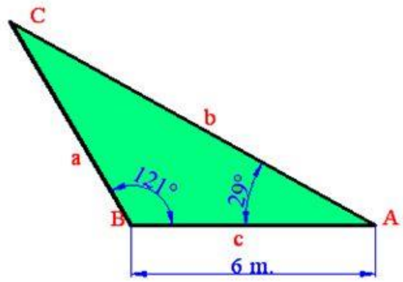
Las incógnitas son los otros dos lados y un ángulo. La solución trigonométrica se consigue aplicando el siguiente procedimiento.

a. Calcula el valor del tercer ángulo. Como se conocen dos ángulos, el tercero se calcula usando el teorema que afirma que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°. Así por ejemplo si se conocen los ángulos B y C; entonces el ángulo A será:
   ∢A= 180° - <B - <C

b. Dado un lado, y conociendo ya el tercer ángulo, calcula los otros dos lados empleando la ley de senos. Por ejemplo, si el lado conocido es a. Tenemos que:
   $\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} \Rightarrow b = \frac{a\ sen\ B}{sen\ A}$

Y $\frac{a}{sen\ A} = \frac{c}{sen\ C}$ ➡ $c = \frac{a\ sen\ C}{sen\ A}$

Ejemplo: Los tres datos conocidos de un triángulo los tienes en la figura siguiente. Halla los tres datos que faltan por conocer:



Respuesta: C = 30º; a = 5,8 m; b = 10,28 m.

Solución

El ángulo C = 180º – (121º+29º) = **30º**

Haces uso del teorema del seno.

Calculamos el valor de **b:**

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{sen\ B}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{sen\ C}};\ \frac{b}{sen\ 121°} = \frac{6}{sen\ 30°};\ \frac{b}{0.857} = \frac{6}{0.5}$$

$$b = \frac{6 \times 0,857}{0,5} = 10,28\,m$$

Calculamos el valor de a:

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{c}{\text{sen C}}$$

$$\frac{a}{\text{sen } 29°} = \frac{6}{\text{sen } 30°};\ \frac{a}{0,484} = \frac{6}{0,5};\ a = \frac{0,484 \times 6}{0,5} = 5,8\,m$$

2.10.2 SEGUNDO CASO: CUANDO SE CONOCEN DOS LADOS Y EL ÁNGULO COMPRENDIDO ENTRE ELLOS.

Las incógnitas son los otros dos ángulos y el tercer lado. La solución trigonométrica se consigue aplicando el siguiente procedimiento.

a) Calcula el tercer lado del triángulo mediante la ley de cosenos. Si conocemos los lados a y b y el ángulo C, se tiene que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$\boldsymbol{c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\ cosC}}$$

b) Una vez conocidos los tres lados, podemos calcular alguno de los otros ángulos empleando nuevamente la ley de cosenos, y el tercer ángulo se puede calcular mediante el teorema que afirma que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.

Por ejemplo. Si se sabe que el ángulo C de un triángulo obtusángulo es igual a 110°, a= 3 y b = 8 unidades. Calcular los demás elementos del triángulo.

Aplicamos la fórmula del segundo caso:

$$\boldsymbol{c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\ cosC}}$$

Sustituyendo los datos, tenemos que:

$$c = \sqrt{3^2 + 8^2 - 2(3)(8)\cos 110°}$$

$$c = 9.46\ unidades$$

Ahora se procede a calcular un ángulo, digamos el ángulo A:

$$< A = arccos\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Sustituyendo los datos tenemos que

$$< A = arccos\left(\frac{8^2 + 9.46^2 - 3^2}{2(8)(9.46)}\right)$$

$$< A = 17.33°$$

$$< A = 17°\ 19'36''$$

Como $< B = 180° - < A - < C,$ sustituyendo se obtiene que

$$< B = 180° - 17.33° - 110°$$

$$< B = 52.67°$$

$$< B = 52°40´12´´.$$

Así,: c=9.46 unidades; $< A = 17°19´36´´$, $< B = 52°40´12´´$.

2.10.3 TERCER CASO: CUANDO SE CONOCEN TRES LADOS

Las incógnitas son los tres ángulos que forman el triángulo oblicuángulo. La solución trigonométrica se consigue aplicando el siguiente procedimiento.

1. Aplica la ley de cosenos para calcular los primeros dos ángulos $< A\ y\ < B$

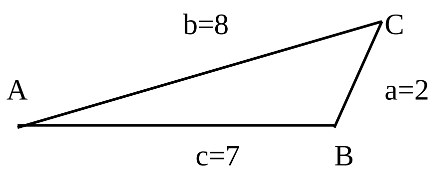
$$cosA = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$< A = arccos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$cosB = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$< B = arccos\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

2. Calcula el tercer ángulo, $< C$, empleando el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo:

$$< C = 180° - < A - < B$$

Ejemplo: En el triángulo de la siguiente figura, *a=2, b=8 y c=7*. Calcula los ángulos internos del triángulo.



Para calcular el ángulo A tenemos:

$$< A = arccos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Sustituyendo los datos,

$$< A = arccos\frac{8^2+7^2-2^2}{2(8)(7)}$$

$$< A = arccos0.9732$$

$$< A = 13.2912°$$

$$< A = 13°17´28´´$$

Para el ángulo B

$$< B = arccos\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$< B = arccos\frac{2^2 + 7^2 - 8^2}{2(2)(7)}$$

$$< B = arccos - 0.3928$$

$$< B = 113.132°$$

$$< B = 113°07´55´´$$

Para el ángulo C:

$$< C = 180° - < A - < B$$

$$< C = 180° - 13°17´28´´ - 113°07´55´´$$

$$< C = 53°34´37´´.$$

Así,: $< A = 13°17´28´´$ $< B = 113°07´55´´$ $< C = 53°34´37´´$

2.10.4 Cuarto caso: cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Las incógnitas son un lado y los otros dos ángulos que forman el triángulo oblicuángulo.

En este caso, se pueden tener una o dos soluciones, o puede no haber solución. Supongamos que los lados conocidos son *a y b* y que el ángulo conocido es <A.

La solución trigonométrica se consigue aplicando el siguiente procedimiento

1. Usando la ley de senos para calcular el ángulo B

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB}$$

Despejando:

$$senB = \frac{bsenA}{a}$$

$$< B = arcsen\frac{bsenA}{a}$$

2. Sea x la cantidad $\frac{b\ senA}{a}$, es decir,

$$x = \frac{b\ senA}{a}$$

Tenemos tres posibilidades:

a) Si x=1, el problema tiene solución única, que corresponde al <B=90°, pues arcsen 1=90°

b) Si x$>$ 1, el problema no tiene solución a causa de que sen B$\leq$ 1.

c) Si $x < 1$, el problema tiene dos soluciones. La ley de senos nos permite hallar el valor del ángulo B. Como sabemos, senB=sen(180°-B). Luego,

$$< B = arcsen\frac{bsenA}{a}$$

$$< B = 180° - arcsen\frac{bsenA}{a}$$

En cualquier caso, una vez hallado el valor del ángulo B podemos calcular el tercer ángulo con la relación

$$< C = 180° - < A - < B$$

El tercer lado lo podemos calcular mediante la ley de senos:

$$\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC}$$

$$c = \frac{asenC}{senA}$$

Ejemplo1: en un triángulo se conocen los siguientes elementos <A=38°, *a=3 y b=7 unidades*. Calcular los demás elementos del triángulo.

A partir de la ley de senos, el <B es

$$< B = arcsen\frac{bsenA}{a}$$

$$Como\ x = \frac{bsenA}{a}\ , sustituyendo,$$

$$x = \frac{7sen38°}{3}$$

$$x = 1.43\ y\ este\ valor\ es > 1.$$

Por lo tanto, no es posible solucionar este problema a partir de los datos proporcionados.

Ejemplo2. El <A=63°, *a=13 y b=6* unidades. Calcular los demás elementos del triángulo.

Para el ángulo B tenemos:

$$< B = arcsen \frac{bsenA}{a}$$

$$Como\ x = \frac{bsenA}{a}\ , sustituyendo,$$

$$x = \frac{6\ sen\ 63°}{13}$$

$$x = 0.41123\ este\ valor\ es\ < 1$$

Por lo que tenemos dos soluciones posibles:

a) <B=arcsen 0.41123

<B=24.28236°

<B=24°16´56´´

b) <B=180°-arcsen 0.41123

<B= 180°-24°16´56´´

<B=155°43´04´´

Calculemos para cada uno de estos casos el resto de los elementos del triángulo

a)Primera solución. Si <B= 24°16´56´´

$$< C = 180° - 63° - 24°16´56´´$$

$$< C = 92°43´04´´$$

Para calcular el lado *c* utilizamos

$$c = \frac{a\ sen\ C}{senA}$$

Sustituyendo los valores

$$c = \frac{13\ sen\ 92°43´04´´}{sen\ 63°}$$

$$c = 14.57\ unidades$$

Así: <B=24°16´56´´; <C=92°43´04´´; y *c*=14.57 unidades

b) Segunda solución. Con <B=155°43´04´´ no se puede llegar a un resultado válido a causa de que no se cumple el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo.

Por lo tanto, solo existe una solución.

2.10.5 EJERCICIOS CASOS DE RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS:

1. Una tormenta tropical provocó que una palmera se inclinara 28° con respecto a la vertical. En un momento determinado, en que el ángulo de elevación del Sol es de 30°, la palmera proyecta una sombra de 26 metros. ¿Cuál es la altura de la palmera?

2. Dos corredores parten del mismo punto. Uno sale hacia el sureste con un ángulo de 60° con respecto a la dirección sur, y el otro sal en dirección sur. Si el primero mantiene una velocidad de 8 km/h y el otro una velocidad de 10 km/h, ¿a qué distancia estarán respectivamente después de 3 horas de recorrido?

3. La resultante de dos fuerzas de 16 newtons y 22 newtons es una fuerza de 31 newtons. ¿Qué ángulo forman las dos fuerzas entre sí?

4. Desde los puntos A y B de una misma orilla de un río, y separados entre sí 18 m, se observan el pie P y la copa C de un ciprés situado en la orilla opuesta. Calcula la altura del Ciprés sabiendo que los ángulos miden PAB=32°, PBA=47° y PAC=50°. Haz un diagrama del problema para resolverlo.

5. Dos personas caminan por un sendero, pero en un punto éste se bifurca formando un ángulo de 48°. Cada uno va por su lado: uno camina a 4km/h y el otro a 3.5km/h. ¿A qué distancia se encuentran al cabo de media hora? Haz un diagrama del problema para resolverlo.

6. El dueño del rancho “La Consentida” quiere saber cuánto debe medir la tubería que necesita instalar para que llegue agua desde el rancho “La Lupita”. Sabe que la distancia que hay entre su rancho y la casa de su administrador es de 235 m y la distancia entre “La Lupita” y la casa de su administrador es de 103 m. El ángulo que se forma en “La Lupita” con respecto a la casa del administrador y el rancho “La Consentida” es de 55°.

7. Un Herrero debe hacer una mesa rinconera triangular de tal forma que un lado mida 4 m, el otro 2.5 m y el ángulo opuesto al primer lado debe ser de 60°. ¿Lo conseguirá? Explica si se puede.

8. Calcula la distancia que hay entre la casa en que vive Malena la casa en que vive Landy, conociendo que la distancia que hay la casa de Malena y la de Julián es de 3.85 km, y la distancia que hay entre la casa de Julián y la de Landy es de 4.39 km. El ángulo en la casa de Julián con respecto a las casas de Landy y Malena es de 105°.

9. ¿Será posible resolver el triángulo rectángulo en el que a=20 y b=15, aplicando la ley de cosenos? Justifica tu respuesta.

2.11 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Recordemos que una *ecuación* es una igualdad que contiene incógnitas, esto es, cantidades desconocidas, y que, al ser resuelta la ecuación, la igualdad solo resulta válida para determinados valores de las incógnitas; en contraste, una *identidad* es una igualdad que se cumple para cualesquiera valores de las literales que intervienen en ella.

2.11.1 DEFINICIÓN DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una identidad trigonométrica es una igualdad en la que se relacionan las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

Consecuentemente, una identidad trigonométrica en la variable A es válida para todo valor de A para el cual las funciones estén definidas.

Las identidades trigonométricas se emplean para escribir una expresión trigonométrica de una forma equivalente, lo cual *tiene* utilidad en la resolución de ecuaciones trigonométricas, en la comprobación de la validez de otras identidades trigonométricas de mayor complejidad y en la resolución de problemas propios de otras disciplinas científicas, como la química y la física, siempre que se requiere sustituir una expresión matemática por otra equivalente, entre otros usos.

Las identidades trigonométricas básicas pueden clasificarse de la siguiente manera:

1. Identidades de equivalencias de las funciones trigonométricas.

2. Identidades pitagóricas.

2.11.2 IDENTIDADES DE EQUIVALENCIAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se les conoce con este nombre porque establecen las relaciones entre las funciones trigonométricas. Son las siguientes:

1. $sen\ A = \frac{1}{\csc A}$, si $\csc A \neq 0; y\ su\ recíproca \csc A = \frac{1}{senA}$, si $sen\ A \neq 0$.

¿A qué es igual el producto de la función sen A por la función csc A?

2. $\cos A = \frac{1}{\sec A}, si \sec A \neq 0; y\ su\ recíproca \sec A = \frac{1}{\cos A}, si \cos A \neq 0.$

¿A qué es igual el producto de la función cos Apor la función sec A?

3. $\tan A = \frac{1}{\cot A}, si \cot A \neq 0; y\ su\ recíproca \cot A = \frac{1}{\tan A}, si \tan A \neq 0$

¿A qué es igual el producto de la función tan A por la función cot A?

4. $\tan A = \frac{sen\ A}{\cos A}, si \cos A \neq 0$

¿A qué es igual el producto de la función tan A por la función cos A?

5. $\cot A = \frac{\cos A}{sen\ A}, si\ sen\ A \neq 0.$

$¿A\ qué\ es\ igual\ el\ producto\ de\ la\ función \cot A\ por\ la\ función\ sen\ A?$

2.11.3 IDENTIDADES PITAGÓRICAS

Se llaman así porque para su demostración se emplea el teorema de Pitágoras. Estas identidades son las siguientes:

1. $sen^2A + cos^2A = 1 \leftrightarrow sen^2A = 1 - cos^2A \leftrightarrow cos^2A = 1 - sen^2A$

¿Cuál sería el valor del sen A y cuál el de cos A?

2. $tan^2A + 1 = sec^2A \leftrightarrow tan^2A = sec^2A - 1 \leftrightarrow sec^2A - tan^2A = 1$

¿Cuál sería el valor de tan A y cuál el de sec A?

3. $cot^2A + 1 = csc^2A \leftrightarrow cot^2A = csc^2A - 1$

¿A qué sería igual la diferencia de $csc^2A - cot^2A$?

Como se ha mencionada ya, las 8 identidades trigonométricas básicas anteriores y las definiciones de las funciones trigonométricas se utilizan para verificar si son válidas otras identidades trigonométricas más complejas.

2.11.4 PROCEDIMIENTO DE VERIFICACIÓN DE LA VALIDEZ DE UNA IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA

Un método práctico es el siguiente:

1. Trabajar con cualquiera de los miembros de la identidad trigonométrica, de tal forma que se igualen ambos miembros. Muchas veces se selecciona el primer miembro para trabajar, aunque otras veces se emplea el segundo miembro, y a veces se trabajan los dos miembros a la vez.

2. Realizar las sustituciones (empleando alguna o algunas de las identidades trigonométricas básicas), efectuar las operaciones aritméticas necesarias, aplicar algunos conceptos algebraicos como los productos notables y la descomposición en factores, hasta obtener la igualdad planteada, de tal forma que el primer miembro de la identidad trigonométrica quede igual al segundo miembro.

Con la intención de facilitarte el desarrollo de la habilidad para la verificación de identidades trigonométricas, lo que lograrás a través de la realización de los ejercicios, se presentan las siguientes sugerencias.

- Seleccionar un miembro de la identidad para transformarlo en el otro miembro. En caso de que al emplear un miembro no se logre el objetivo, entonces utilizar el otro miembro de la igualdad.
- En caso de poder utilizar alguna de las identidades trigonométricas básicas tratar de convertir las funciones trigonométricas a la función seno o coseno, si con esto podemos lograr la demostración de la identidad.
- Si aparece un número 1, tratar de igualarlo con alguna identidad pitagórica, si con esto se llega a la demostración.

- Reacomodar los términos de la identidad cada vez que sea necesario para facilitar la demostración de la identidad.
- Recordar las operaciones aritméticas con fracciones.
- Recordar las reglas de productos notables y las de descomposición en factores de expresiones algebraicas.

Ejercicio. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas

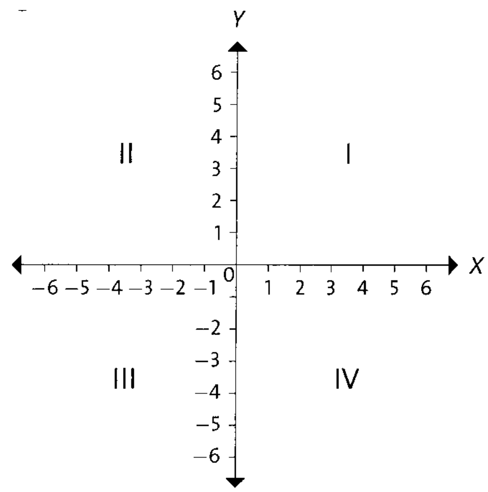
a. $\sec A \cos A = 1$
b. $sec^2 A - tan^2 A = 1$
c. $\frac{sen^3 A}{tan^2 A} = sen\ A - sen^3 A$
d. $(1 + tan^2 A)(1 - sen^2 A) = 1$
e. $\frac{1 - csc^2 A}{csc^2 A} = -cos^2 A$
f. $\frac{csc^2 A - 1}{cotA\ cosA} = \frac{1}{senA}$
g. $\frac{sec^2 A + cot^2 A}{csc^2 A} = sec^2 A$
h. $\sec A = \frac{\csc A}{\sqrt{csc^2 A - 1}}$
i. $\frac{\cos 3x}{sen\ x} + \frac{sen\ 3x}{\cos x} = 2 \cot 2x$

UNIDAD 3

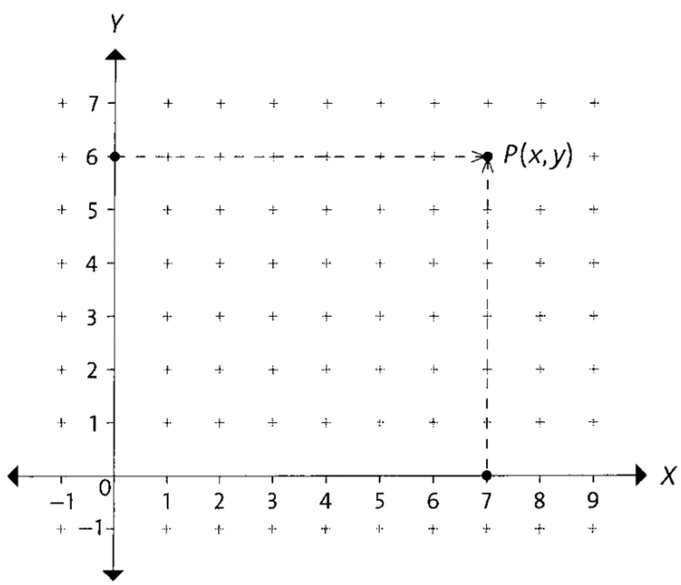
SOLUCIÓN DE ECUACIONES

3.1 SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

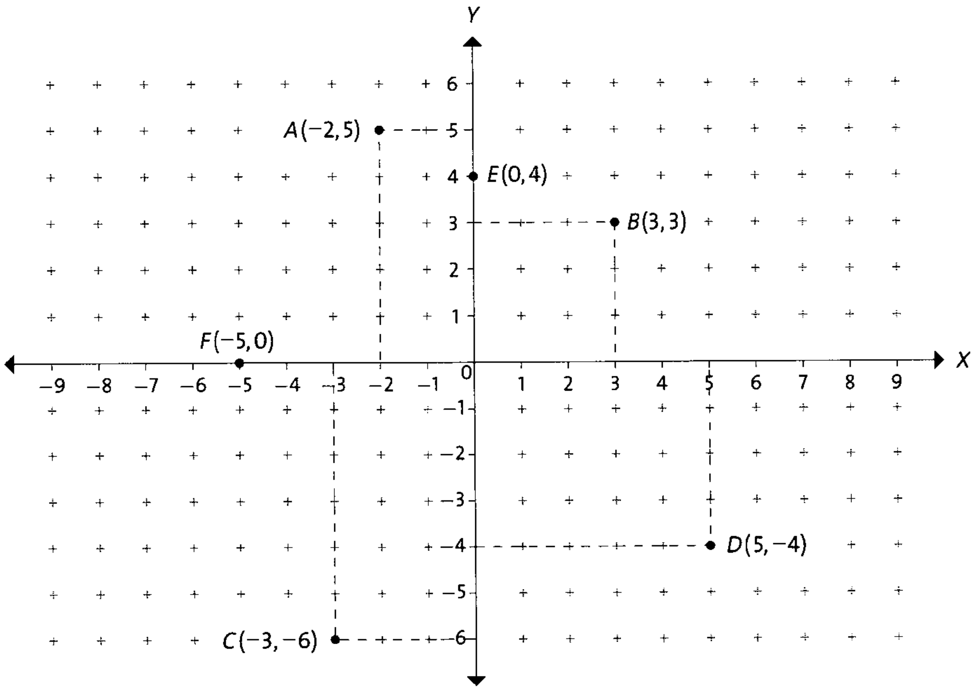
El sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas, llamadas así en honor a Rene Descartes, consiste en dos rectas de números reales, una horizontal y otra vertical que se cruzan perpendicularmente en un punto denominado origen. A dichas rectas se les denomina ejes coordenados. Al eje horizontal se le llama el eje de las "x" o simplemente eje x; al eje vertical se le llama eje de las "y" o eje y. Estos ejes dividen al plano en cuatro cuadrantes I, II, III y IV como se muestra a continuación.



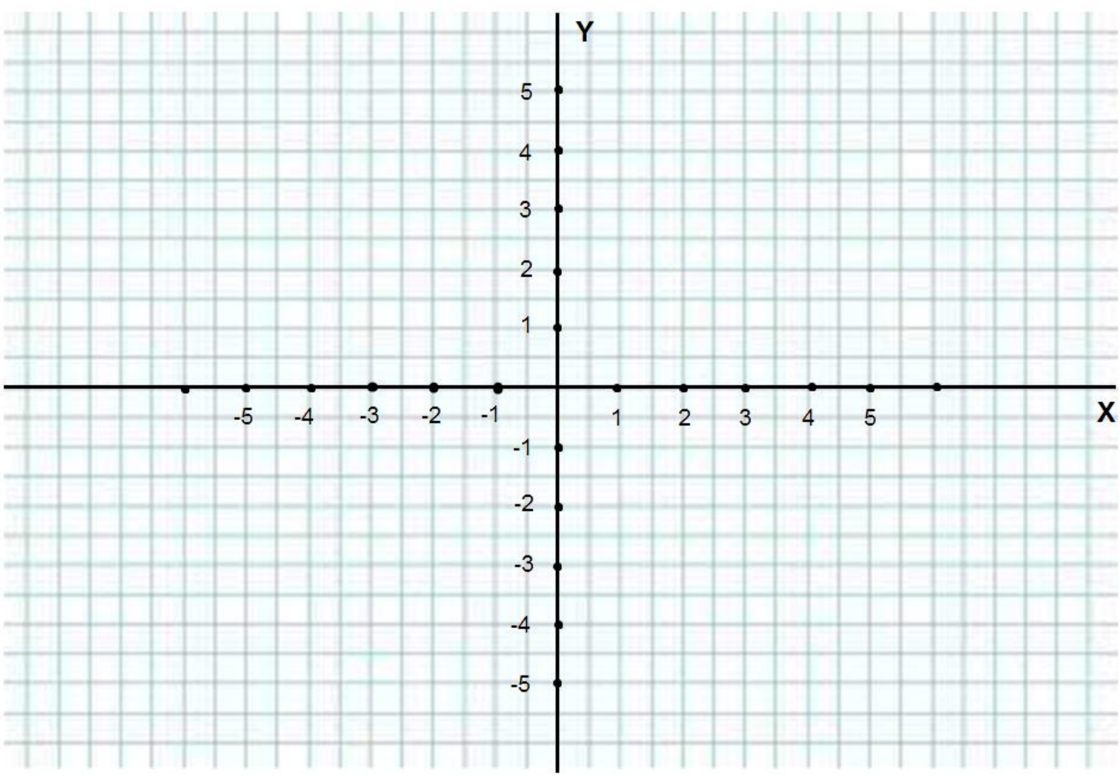
En el sistema de coordenadas cartesianas, a cada punto *P* del plano se le asigna una pareja de números ordenados y a cada par de números ordenados se le asocia un punto P en el plano el cual se denota como *P(x, y)*, donde al número x se le llama abscisa y al número y se le llama ordenada.



Ejemplo: Localizar en el plano cartesiano los siguientes puntos, A(-2, 5) B(3, 3), C(-3, 6), D(5, -4), E(0, 4) y F(-5, 0).



Ejercicios: Ubicar en el plano cartesiano los siguientes puntos, A(-3,-4) B(-3,- 3), C(3, 4), D(-5, 4), E(0, -4) y F(5, -3)



3.2 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

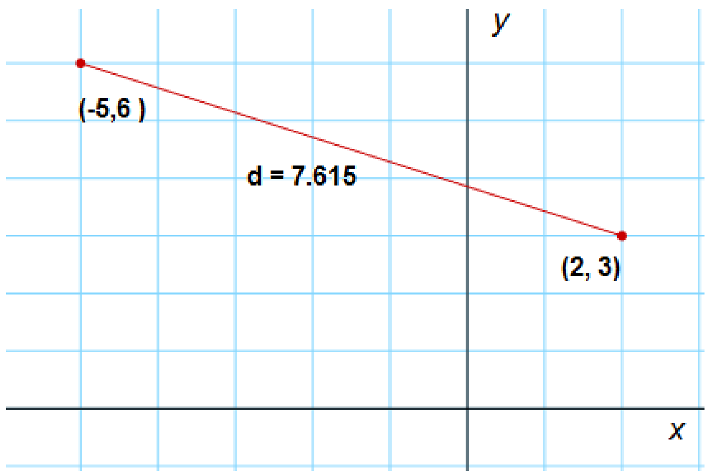
Dados dos puntos A(x_1, y_1) y B(x_2 y_2) en el plano cartesiano, la longitud del segmento rectilíneo cuyos extremos son A y B, o lo que es lo mismo, la distancia entre los puntos A y B está dada por la siguiente ecuación:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo: Calcular la distancia entre los puntos A(2, 3) y B(-5, 6).

$$|AB| = \sqrt{(-5-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (3)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$$

$$|AB| = 7.615$$



Ejercicios: Resolver usando la formula de ladistancia entre dos puntos.

Calcular la distancia entre los puntos A y B en los ejercicios del 1 al 10.

1. A(2, 3) y B (4, 5)
2. A(4, -3) y B (2, 2)
3. A(-5,- 3) y B (4,-3)
4. A(4, 3) y B (0, 5)
5. A(0, 0) y B (4, 5)
6. A(8,- 3) y B (-7, 6)
7. A(-2, - 3) y B (-4, -5)
8. A(3, 3) y B (5, 5)
9. A(-3, 3) y B (-3, 10)
10. A(-5, -3) y B (6, 4)
11. Calcular el perímetro del triángulo cuyos vértices en el plano cartesiano son A(-1, -1), B(4, 3) y C(4, -1)

12. Demostrar que el triángulo cuyos vértices son A(-5, 7), B() y C() es isósceles.
13. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son A(-3, -1), B(0, 3), C(3, 4), D(4, -1).
14. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son A(2, -2), B(-8, 4) y C(5, 3).
15. Calcular el perímetro y el área del cuadrilátero formado por A(0, 1), B(3, 5), C(7, 2) y D(4,-2).

3.2.1 CALCULO DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO RECTILINEO

Para determinar el punto medio de un segmento rectilineo entre dos puntos A(x_1, y_1) y B(x_2 y_2), se usan las siguientes ecuaciones:

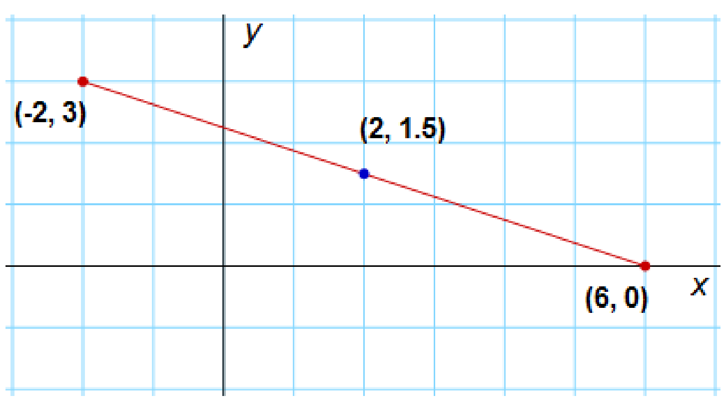
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplo: Calcular el punto medio del segmento formado por los puntos A(-2, 3) y B(6, 0).

$$x = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$$

Por tanto el punto medio del segmento se encuentra en (2, 3/2).



Ejercicios: Aplicar las ecuaciones del punto medio.

En los ejercicios del 1 al 10 calcular el punto medio.

1. A(2, 3) y B (4, 5)
2. A(4, -3) y B (2, 2)
3. A(-5,- 3) y B (4,-3)
4. A(4, 3) y B (0, 5)
5. A(0, 0) y B (4, 5)
6. A(8,- 3) y B (-7, 6)
7. A(-2, - 3) y B (-4, -5)
8. A(3, 3) y B (5, 5)
9. A(-3, 3) y B (-3, 10)
10. A(-5, -3) y B (6, 4)
11. Comprobar que las diagonales del cuadrilátero formado por los puntos A(-2, 3), B(1, 6), C(6, 0), D(3, -3) se intersectan en el mismo punto.
12. Dibujar el triángulo formado por los puntos A(-5, 4), B(2, 3), C(-1, -2) y calcular el punto medio de cada uno de sus lados.

3.3 LUGARES GEOMETRICOS

Un lugar geométrico es el conjunto de puntos que cumplen con determinadas propiedades geométricas.

Una forma de representar los lugares geométricos es mediante una ecuación algebraica que describe todos los puntos que cumplen con ciertas propiedades geométricas la cual es llamada ecuación del lugar geométrico.

Entonces un punto en el plano cartesiano forma parte de un lugar geométrico si sus coordenadas satisfacen dicha ecuación.

3.4 LA LINEA RECTA

Por definición una línea recta es una sucesión infinita de puntos ubicados en una misma dirección y que se extiende en ambos sentidos. También puede definirse como una sucesión de puntos de forma indefinida que tienen la misma pendiente.

La pendiente de una línea rectase define como la tangente del ángulo de inclinación de dicha recta; usualmente se representa con la letra *m*. Puede calcularse mediante la siguiente formula:

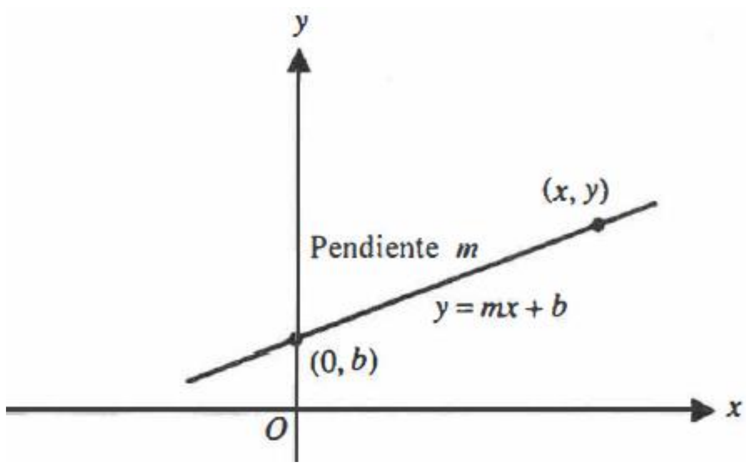
$$m = \tan \alpha$$

siendo α el ángulo de inclinación.

3.4.1 FORMA PENDIENTE-ORDENADA AL ORIGEN

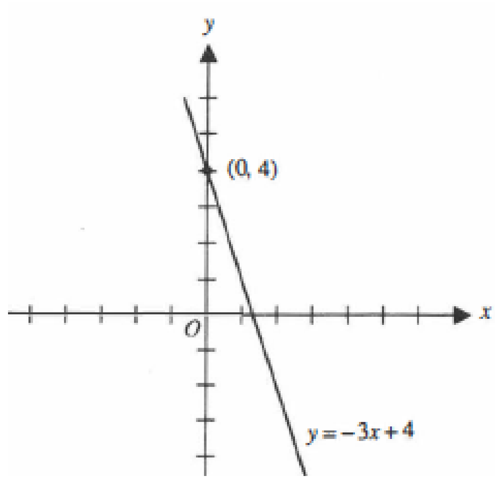
Cuando se conoce la pendiente m de una recta que interseca el eje y en un punto cuya abscisa es cero (0, b). Entonces la ecuación de la recta está dada por la siguiente ecuación:

$$\boxed{y = mx + b.}$$



Ejemplo: Escriba la ecuación de la recta con pendiente -3 y ordenada al origen 4. Grafique la recta.

Al sustituir en la ecuación m= -3 y b = 4, esto da de inmediato la ecuación y = -3x + 4, cuya grafica es la siguiente:



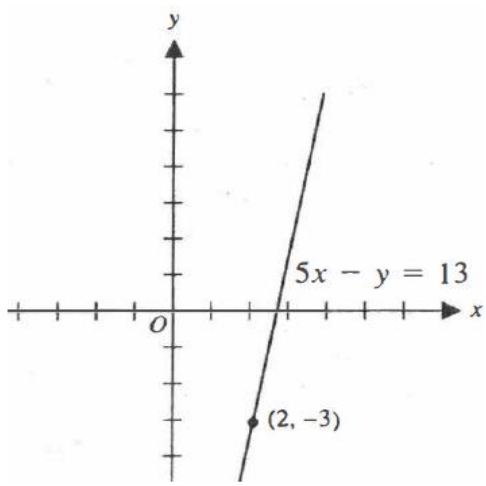
3.4.2 FORMA PUNTO-PENDIENTE AL ORIGEN

La ecuación pendiente-ordenada al origen puede cambiarse ligeramente para tomar en cuenta otro punto cualquiera de la recta. Si (x_1, y_1) es otro punto de la recta, se puede reemplazar la abscisa x con x_1 y la ordenada y con y_1 para dar lugar a la forma punto-pendiente:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1).}$$

Ejemplo: Encuentre la ecuación de la recta que pasa por (2, -3) y tiene pendiente 5. Grafique la recta.

Usando la forma punto pendiente con $x_1 = 2$, $y_1 = -3$ y $m = 5$, se obtiene $y + 3 = 5(x - 2)$ o $5x - y = 13$.



3.4.3 ECUACIÓN DADOS DOS PUNTOS

Cuando se conocen dos puntos (x_1, x_1) y (x_2, y_2) que se encuentran sobre una recta se puede obtener una nueva ecuación si primero se calcula la pendiente mediante la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Y se usa la forma punto pendiente con cualquiera de los dos puntos dados:

$$\boxed{y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)}$$

Ejemplo: Encuentre la ecuación de la recta determinada por los puntos (3, - 3) y (2, 4)

En este caso primero se debe obtener la pendiente de la recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 + 3}{2 - 3} = -7$$

Ahora se usa la fórmula punto-pendiente con $x_1 = 3$, $y_1 = -3$ de lo que resulta

$$y + 3 = -7(x - 3) \text{ o } 7x + y - 18 = 0$$

3.4.4 ECUACIÓN GENERAL DE LA LINEA RECTA

Otra forma de representar una línea recta es mediante la ecuación:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Que si se compara con la ecuación dados dos puntos $(x_1\,, x_1)$ y $(x_2\,, y_2)$

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

entonces se pueden obtener las constantes de la forma general mediante:

$$A = y_2 - y_1 \qquad B = x_1 - x_2 \qquad C = x_2 y_1 - x_1 y_2$$

También se puede relacionar con la ecuación de la forma pendiente-ordenada al origen

$$y = mx + b$$

Entonces, se pueden obtener la pendiente, la ordenada y la abscisa al origen mediante:

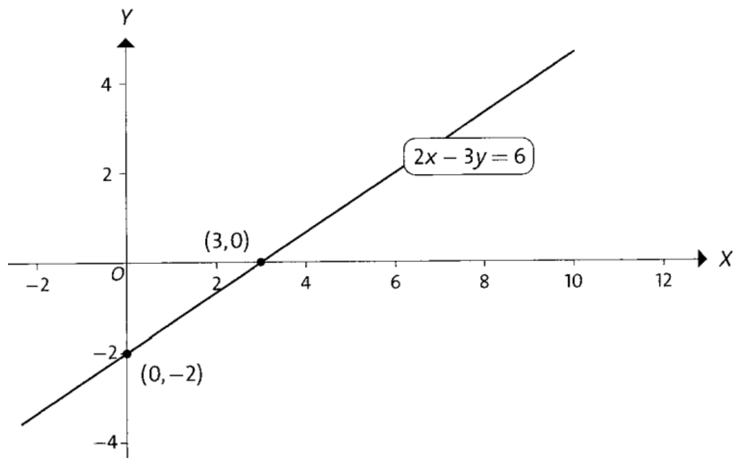
$$m = -\frac{A}{B}\,, \qquad b = -\frac{C}{B}, \qquad a = -\frac{C}{A}$$

Ejemplo: Obtener la pendiente así como la ordenada al origen de la línea recta dada por la ecuación $2x - 3y = 6$, expresarla en la forma pendiente-ordenada al origen y realizar la gráfica correspondiente.

La forma general es $2x - 3y - 6 = 0$ de donde se obtiene A=2, B=-3 y C=-6. Por tanto :

$$m = -\frac{A}{B} = \frac{2}{3} \qquad b = -\frac{C}{B} = -2 \qquad a = -\frac{C}{A} = 3$$

La ecuación buscada es: $y = \frac{2}{3}x - 2$ y la gráfica correspondiente se muestra a continuación:



Ejercicios:

Por inspección, indique la pendiente y las intersecciones de cada recta representada por las ecuaciones en los ejercicios 1 a 15. Escriba cada ecuación a la forma pendiente-ordenada al origen.

1. $x - 4y = 8$
2. $x - y = 6$
3. $x - y + 2 = 0$
4. $9x + 4y = 36$
5. $4x - 3y = 12$
6. $3x - 6y + 10 = 0$
7. $7x + y = 11$
8. $3x + 2y = 14$
9. $3x + 7y - 6 = 0$
10. $8x - 2y = 5$
11. $8x - 3y = 4$
12. $5x + 5y - 1 = 0$
13. $6x + 7y = 12$
14. $4.0213x - 8.7631y = 11.3331$
15. $3x + 3y + 4 = 0$

En cada uno de los ejercicios 16 a 29, escriba la ecuación de la recta dada por la pendiente m y la ordenada al origen b.

16. $m = 2, b = -3$
17. $m = -4, b = 7$
18. $m = 5, b = 0$
19. $m = -2/3, b = 2$
20. $m = 3/2, b = -4$
21. $m = 0, b = 11$
22. $m = 4/3, b = 3$
23. $m = 7, b = 0$
24. $m = -3$, $b = -4$
25. $m = 9, b = 11$
26. $m = -8$, $b = 7$
27. $m = -3/4, b = 5$
28. $m = 5/3$, $b = -4$
29. $m = 7.0132, b = -4.9875$

En cada uno de los ejercicios 30 a 39, encuentre la ecuación de la recta que pasa por A y que tiene pendiente m. Dibuje las rectas.

30. $A(1, 3), m = 2$
31. $A(-5, 3), m = 1$
32. $A(0, -2), m = 0$
33. $A(-3, 0), m = 3/2$
34. $A(-6, -3), m = 1$
35. $A(-2, 5), m = -1/2$
36. $A(4, 0), m = -3$
37. $A(0, 0), m = 4/3$
38. $A(0.01157, 6.23981), m = -4.90032$
39. $A(-3, 6), m = 2$

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B en cada uno de los siguientes ejercicios.

40. $A(-1, 3), B(5, -4)$
41. $A(5, 1), B(1, 4)$
42. $A(2, 0), B(-6, 4)$
43. $A(-2, 3), B(7, 4)$
44. $A(0, 0), B(-4, 3)$
45. $A(5, 1/2), B(-1, 3/4)$
46. $A(-1, -6), B(-1, 4)$
47. $A(1/3, 4), B(0, -2/3)$
48. $A(0, 0), B(3, 1)$
49. $A(4, 1), B(-2, -5)$

Expresar las siguientes ecuaciones en la forma pendiente-ordenada al origen, primero mediante despeje, después usando las fórmulas para la pendiente, ordenada y abscisa al origen y realizar las gráficas correspondientes.

50. $2x - y - 6 = 0$

51. $3x - y - 10 = 0$

52. $x + 3y - 2 = 0$

3.5 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA VARIABLE.

Una ecuación variable es una expresión algebraica que tiene el signo de igualdad (=) entre los términos. Los pasos que deben hacerse para resolverla son los siguientes:

1) Quitar los denominadores (si los hay).
2) Quitar los paréntesis (si los hay).
3) Reducir términos semejantes.
4) Colocar las variables en un lado de la igualdad y los términos independientes en el otro lado.
5) Volver a reducir los términos semejantes.
6) Despejar la variable para resolver la ecuación.
   Nota: es recomendable comprobar el resultado de la ecuación.

Serie I. Resuelve las siguientes ecuaciones.

1) $2x - 4 = 5x + 8$
2) $7x - 1 = 3x + 15$
3) $4x - 2 + 5x = 12 + 7x - 8$
4) $7x - (8 + 20x) = 18$
5) $7x + 5(x - 8) = -4(3x - 5) + 12$
6) $v - 5(v - 20) = 0$
7) $8x = x + 14$
8) $50x = 50 - 80(1 - x)$
9) $4x - 45 = 5 - 6x$
10) $x = 300 + 11x$
11) $495 = 2x - (1 - 9x) + 1$
12) $y - 2 = -5(30 - y) - 3$

Serie II. Encuentra el valor de la variable x de las siguientes ecuaciones.

1) $0.84(x - 5) = 0.74x + 0.90(5)$
2) $5x + 3.5(440 - x) = 1780$
3) $0.35x + 0.40(x + 15000) = 54750$
4) $4(2x + 5) = 3(5x - 2)$
5) $x + 0.25(8 - x) = 0.65(8)$
6) $0.3(3 + 2x) + 1.2x = 3.2$
7) $\frac{3+5x}{5} = \frac{4-x}{7}$
8) $\frac{2x-9}{4} = 2 + \frac{x}{12}$
9) $\frac{1}{5}x + 2 = 3 - \frac{2}{7}x$
10) $(4x - 5)^2 - 16x^2 = 9 + 24x$
11) $(3x - 4)(2x + 3) + 5x = 6x^2$
12) $(2x + 7)(x - 5) - 7 = 2x^2 + 3 + 4x$
13) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + 200 = x$
14) $\frac{1}{x} + \frac{1}{45} = \frac{1}{20}$
15) $\frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{x}$
16) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 315 = x$
17) $\frac{1}{7} + \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$

3.6 DESPEJE DE VARIABLES

Si se quiere despejan una variable es necesario observar cual es la variable que se quiere despejar y que operaciones están presentes en la ecuación. Para iniciar el despeje.

Reglas para despejar:

1. Lo que está sumando pasa restando
2. Lo que está restando pasa sumando
3. Lo que está multiplicando pasa dividiendo
4. Lo que está dividiendo pasa multiplicando
5. Si está con exponente pasa con raíz

Sigua el procedimiento para despejar cualquier variable:

a) Si existen denominadores, para eliminarlo debes hallar el común denominador a ambos lados de la fórmula.
b) Ahora lleva todos los términos que tengan la variable a despejar a un solo miembro de la fórmula, y los demás términos al otro miembro; deben tener en cuenta que cuando pasan de un miembro a otro cambian de signo es decir si está sumando pasa restando y viceversa.
c) Suma los términos semejantes si los hay
d) Todos los números y/o variables que acompañan la incógnita a despejar pasan al otro miembro realizando la operación contraria: si estaban dividiendo pasan a multiplicar y viceversa.
e) Si la variable queda negativa, multiplicar por (-1) a ambos lados de la fórmula para volverla positiva (si hay varios términos todos cambian de signo)
f) Si la variable queda elevada a alguna potencia enésima, debes sacar raíz enésima a ambos miembros de la fórmula para cancelar la potencia.
NOTA: ten en cuenta que no siempre es necesario aplicar todos los pasos para despejar una incógnita.

Serie I. Despeja la literal que se indica en las siguientes fórmulas.

1) $s = vt + \frac{1}{2}at^2; v; a$
2) $F = kma; k; m$
3) $F = G\,\frac{m_1 m_2}{d^2}\ ;\ m_1, d$
4) $F = m\frac{v^2}{r}\ ;\ r\ ;\ v$
5) $T = fd\ ;\ f; d$
6) $P = \frac{fd}{L}\ ;\ L\ ;\ f$
7) $E = m\,g\,h\ ;\ m\ ;\ h$
8) $E = \frac{W v^2}{2g}\ ;\ v\ ;\ W$
9) $E = mc^2\ ;\ m\ ;\ c$
10) $\operatorname{sen} A = \frac{O}{h}\ ;\ O\ ;\ h$
11) $\tan A = \frac{O}{a}\ ;\ O$
12) $P = \frac{F}{A}\ ;\ A\ ;\ F$
13) $C = \frac{5}{9}\,(F - 32)\ ;\ F$
14) $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}; T_1; V_2$
15) $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}\ ;\ L$
16) $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{d}}$; T; d; L
17) $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\ ;\ R_1$
18) $P = T^2 R\ ;\ T\ ;\ R$
19) $\frac{1}{D_O} + \frac{1}{D_1} = \frac{1}{f}; D_1; f$
20) $Ax + By + c = 0\ ;\ y$

21) $y^2 = 4ax$; a
22) $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$; h
23) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; r
24) $P = 2(a + b)$; a
25) $A = P(1 + rt)$; P ; t
26) $p = \frac{fV}{V-S}$ v ; s
27) $A = P(1 + r)^2$; P ; r
28) $e = z\sqrt{\frac{pq}{n}}$; n
29) $L = \frac{2b^2}{a}$; a ; b
30) $P = e^t$; t
31) $A = L^2$; L
32) $A = \pi r^2$; r
33) $P = 2\pi r$; r
34) $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$; $\operatorname{sen}^2 A$
35) $V = \pi r^2 h$; h
36) $C = P - Pr, P$

37) El perímetro P de una circunferencia es 72 cm. Encuentra el valor del radio r. La fórmula del perímetro es $P = 2\pi r$.
38) El área A de un circulo es 450 cm^2 encuentra el valor del radio r. La fórmula del área es $A = \pi r^2$
39) El perímetro P de una circunferencia es de 48 cm. Encuentra el valor del área encerrada por la circunferencia.
40) El volumen V de un cilindro circular recto es 354 cm^3, el radio mide 2.8 cm. Encuentra el valor de la altura. La fórmula del volumen es $V = \pi r^2 h$
41) El perímetro de un rectángulo es 96 cm. Si el largo (l) mide 27 cm. Encuentra el valor de la altura a. $P = 2(l + a)$.
42) En un triángulo rectángulo la hipotenusa (h) mide 23 cm, la base (b) mide 18 cm. Encuentra el valor de la altura (a). la fórmula es $h^2 = a^2 + b^2$
43) El volumen de una esfera es 490 cm^3. Encuentra el valor del radio r. La fórmula del volumen es $V = \frac{4\pi r^3}{3}$
44) El área de un cuadrado es 676 m^2. encuentra el valor del lado (L). La fórmula es $A=L^2$
45) En un triángulo rectángulo, la hipotenusa (h) mide 35 cm y la base (b) mide 15 cm. encuentra el valor de la altura a. La fórmula es $h^2 = a^2 + b^2$
46) La profundidad (h) de un pozo es de 42 pies. Si se suelta una piedra. ¿cuánto tiempo (t) tardara en pegar en el fondo del pozo? la gravedad es g = 32 pies/seg. , la fórmula es $h = \frac{1}{2}gt^2$
47) Se tiene una temperatura de 35 °C. Encuentra su equivalente en grados Fahrenheit F la fórmula es: $°C = \frac{5}{9}(F - 32)$
48) El área de un trapecio es 70 cm^2. Si la altura h= 7 cm y la base mayor B= 12 cm, Encuentra el valor de la base menor b. La fórmula es: $A = \frac{(B+b)h}{2}$
49) Un móvil que lleva una velocidad (v) de 40 m/s, tarda un tiempo (t) de 3 seg. en recorrer una distancia (e) de 66 m a partir del momento es que empezó a frenar. Encuentra el valor de la desaceleración (a). La fórmula es:
$$e = vt - \frac{1}{2}at^2$$
50) Una persona tiene un capital (C) de $50,000 mismo que quiere colocar en un banco que le da un interés anual (r) del 13%. Si él quiere tener un monto (M) de $ 100,000 al final de un tiempo (t), ¿durante cuánto tiempo debe invertir el capital? La fórmula es: $M = C(1+t)^2$
51) El área total (A) de un cilindro circular recto es de 1200 cm^2. Si el radio (r) es de 8 cm, Encuentra el valor de la altura (h). La fórmula es: $A = 2\pi r(r + h)$

52) El área (A) de un polígono regular de 6 lados es 665.11 cm²; si el lado (l) del polígono es de 16 cm, Encuentra el valor de la apotema (a). La fórmula es: A=$\frac{P \times a}{2}$. P significa Perímetro del polígono.

53) En la fórmula: n= $\frac{z^2\, p(1-p)}{e^2}$, n=400; z=1.96; p= 0.6. Encuentre el valor de e.

3.7 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 1er GRADO CON 2 VARIABLES.

3.7.1 METODO GRAFICO DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCOGNITAS.

Si se quiere resolver por método gráfico:

1) Se halla la intersección de estas sistemas de ecuaciones para ambas ecuaciones iguale a cero x y después y despeja para ambos la variable
2) Grafique las valores de x e y encontrados para encontrar la intersección.
3) El punto de intersección es la solución.

Por ejemplo:

$$2x + 3y = 8 \;\dots\dots 1$$
$$3x - y = 1 \dots\dots..2$$

Paso 1:

Para la ecuación 1 si x=0 se tiene:

$$0 + 3y = 8$$

Despejar y:

$$y = \frac{8}{3}$$

Se obtiene el par ordenado $(0, \frac{8}{3})$

Para y=0 se tiene:

$$2x + 3(0) = 8$$

Despejando x se tiene:

$$x = \frac{8}{2} \therefore x = 4$$

Se obtiene el par ordenado $(4{,}0)$

Para la ecuación 2 se tiene si x=0, se tiene

$$3(0) - y = 1$$

Despejando y se tiene:

$$y = -1$$

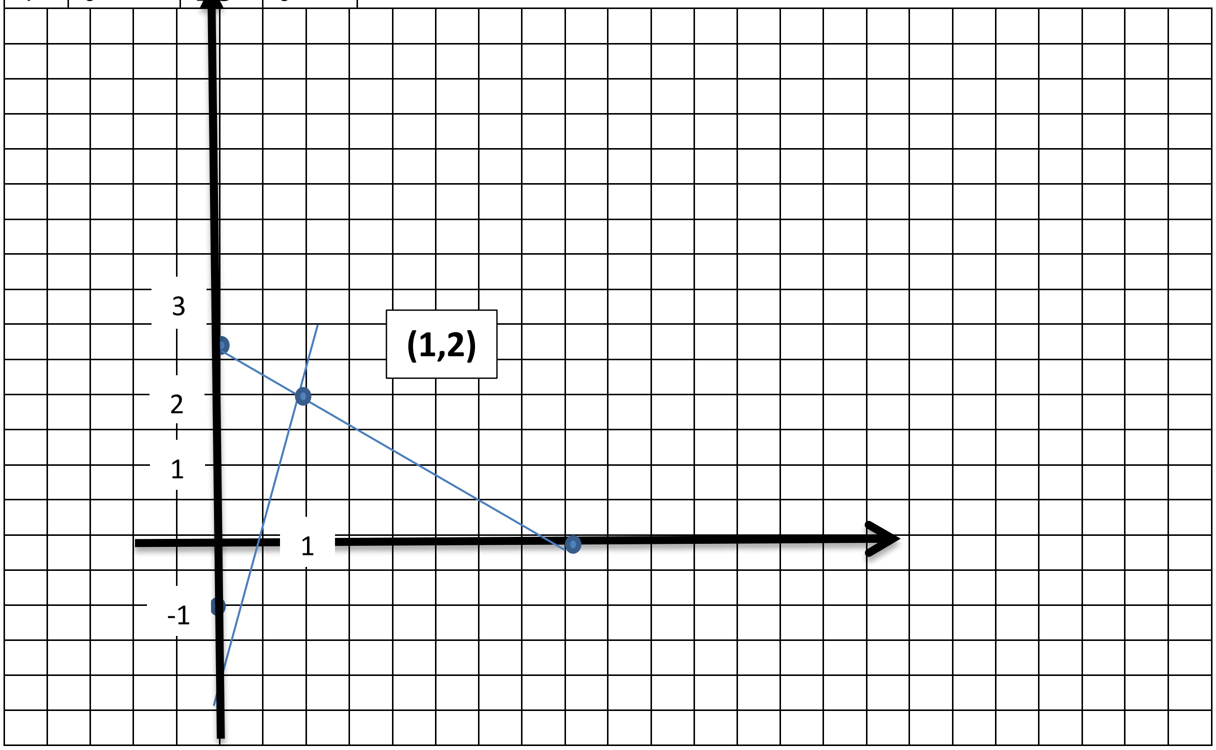
Para y=0 se tiene:

$$3x + 0 = 1$$

Despejando x se tiene:

$$x = \frac{1}{3}$$

Grafica 1		Grafica 2	
x	y	x	y
0	8/3	0	-1
4	0	1/3	0



3.7.2 METODOS DE ELIMINACION

Los métodos de eliminación son:

- Método de eliminación por suma o resta
- Método de eliminación por igualación
- Método de eliminación por sustitución

Método de eliminación por suma o resta.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas empleando el método de eliminación por suma o resta:

1. Multiplíquense los dos miembros de una de las ecuaciones, o ambas, por números tales que resulten iguales a los coeficientes de una misma incógnita
2. Súmense las dos ecuaciones si dichos coeficientes son de signos contrarios, y réstense si son de mismo signo.
3. Resuélvase la ecuación que así resulta, con lo cual se obtiene el valor de la incógnita que contiene.
4. Sustitúyase este valor en una de las ecuaciones dadas y resuélvase; se obtiene así la otra incógnita.

Por ejemplo:

$$x - 2y = 8 \;\ldots\ldots 1$$
$$3x + y = 66 \ldots\ldots..2$$

Multiplique la ecuación 1 por -3 y la ecuación 2 por 1se tiene:

$$-3(x-2y)=-3(8)$$
$$1(3x+y)=1(66)$$

Sume las ecuaciones obtenidas:

$$-3x+6y=-24$$
$$3x+y=66$$
$$7y=42$$

Despejar la variable:

$$y=\frac{42}{7}$$
$$y=6$$

Sustituir x en la ecuación 2 se tiene:

$$3x+6=66$$

Despejar la variable y:

$$3y=66-6$$
$$y=\frac{60}{3}\ \therefore y=20$$

Regla de cramer.

Para la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de la forma. Dado el sistema de ecuaciones:

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

Primer paso:

Una determinante es una expresión numérica en la que se toman los coeficientes de “x” y de “y”, las cuales se escriben dentro de dos barras de la siguiente manera:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

Segundo paso:

Para la determinante de x se cambia la columna de a por la de c, se tiene:

$$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1$$

Tercer paso:

Para la determinante de y se cambia la columna de b por la de c, se tiene:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$$

Cuarto paso:

Dividir el determinante de x entre el determinante y el determinante de y entre el determinante se tiene:

$$x=\frac{D_x}{D} \qquad x=\frac{D_y}{D}$$

Serie I. Resuelve las siguientes ecuaciones simultáneas usando el método gráfico, el método de eliminación por adición o sustracción y el método de determinantes.

1) $2x - 3y = -4$
$5x + 2y = -29$

2) $5x + 4y = -9$
$-4x + y = -3$

3) $6x - y = 21$

4) $2x + y = 11$

5) $3x + y = 11$
$5x - y = 13$

6) $3x + 7y = 19$
$-x + 7y = 31$

7) $3x + 7y = 26$
$-2x + 5y = 2$

8) $2x + 9y = 11$
$4x - 3y = 1$

9) $7x + 5y = 1$
$-4x + 3y = 1$

10) $3x - 2y = -7$
$-9x + 6y = 5$

Serie II. Resuelva los siguientes problemas razonados.

1) ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?

2) Un hombre tiene en su bolsillo 39 monedas algunas son de dos pesos y otras de 5 pesos. Si en total tiene 126 pesos, ¿Cuántas monedas tiene de 2 pesos y cuantas de 5 pesos?

3) Un ganadero vendió 50 terneras y 220 ovejas por 16150 euros. Con los mismos precios vendió 40 terneras y 180 ovejas por 13100 euros. Encuentre el precio en pesos de cada ternera y de cada oveja, si un euro equivale a $17.35 pesos.

4) La suma de las edades actuales de una persona y su hijo es de 66 años. Determine sus edades sabiendo que dentro de 3 años la edad del padre será el triple de la edad de su hijo.

5) Un granjero cuenta con un determinado número de jaulas para sus conejos. Si introduce 6 conejos en cada jaula quedan 4 plazas libres en cada jaula. Si introduce 5 conejos en cada jaula quedan dos conejos libres. ¿Cuántos conejos y jaulas hay?